

# PARAMETRYCZNA IDENTYFIKACJA STRUKTUR MECHANICZNYCH TŁUMIONYCH W SPOSÓB NIECIĄGŁY W ZASTOSOWANIU DO OBUDOWY KOTWIOWEJ

Andrzej Staniek  
*Główny Instytut Górnictwa, Katowice*

## 1 WPROWADZENIE

W światowym górnictwie węglowym obudowa kotwiowa odgrywa wiodącą rolę jako element bezpiecznego utrzymania wyrobisk korytarzowych. Wśród liczących się producentów węgla wydobywanego sposobem podziemnym: USA, RPA i Australii jest ona praktycznie jedyną stosowaną obudową wyrobisk korytarzowych i wykazuje dużą dynamikę wzrostu zastosowań i w innych krajach, w tym także w Polsce.

Poważnym impulsem do rozszerzenia stosowania tej obudowy jest rozwój przemysłu wytwarzającego zmechanizowany sprzęt do kotwienia, przede wszystkim lekkie kotwiarki pneumatyczne i hydrauliczne, wozy kotwiąco-podporowe, a także szeroki asortyment kotwi stalowych. Innym, istotnym czynnikiem rozwoju obudowy kotwiowej, szczególnie w skałach słabych, dotychczas tradycyjnie podtrzymywanych obudową podporową, było masowe wprowadzanie do użytku ładunków klejowych na bazie żywic poliestrowych do osadzania kotwi w górotworze.

Niezależnie od metod projektowania i sposobu wykonania obudowy kotwiowej, podstawowe znaczenie dla stwierdzenia stanu i utrzymania bezpieczeństwa ma kontrola pracy jej parametrów. W przeciwieństwie bowiem do obudowy podporowej, która może być w każdej chwili poddawana inspekcji wizualnej oraz testom sprawdzającym po jej zabudowaniu, istotna (tj. pracująca w odwiercanych otworach) część konstrukcji obudowy kotwiowej jest niewidoczna dla obserwatora znajdującego się w wyrobisku. Powykonawcze sprawdzenie wszystkich jej elementów jest natomiast albo niemożliwe,

albo bardzo uciążliwe. Obecnie stosuje się powszechnie następujące rodzaje kontroli pracy obudowy kotwiowej:

- kontrolę wizualną, polegającą na wzrokowej ocenie jakości wykonania i mocowania zewnętrznych części obudowy, kontroli rozstawu i usytuowania kotwi oraz sprawdzeniu, jeszcze na powierzchni, typu i jakości prętów, terminu ważności użytego spoiwa (ładunku klejowego) itp.
- kontrolę parametrów pracy obudowy kotwiowej, polegającą na pomiarze nośności nominalnej kotwi oraz, w przypadku zamocowania odcinkowego, próbnego obciążenia kotwi.
- kontrolę stateczności wyrobiska – badanie rozwarstwienia skał stropowych lub zaciskania wyrobiska.

W praktyce górniczej, mimo istniejących na rynku bardzo dobrych spoiw, w następstwie: rozwarstwienia skał, ucieczki kleju do szczelin, sedymentacji cementu, pracy górotworu, żerdź kotwiowa bardzo często nie jest związana mechanicznie z górotworem na całej swojej długości. Nie można tego stwierdzić dotychczas stosowanymi metodami. W takiej sytuacji niewiadomym jest, czy zamocowana kotew pełni swoją funkcję właściwie, i jaka miąższość skały jest faktycznie przez nią związana, konsekwencją czego może być zawalenie się stropu.

W wyniku szerszej analizy problemu można stwierdzić, iż skuteczna metoda kontroli ciągłości wklejenia żerdzi kotwiowej do górotworu nie została jeszcze opracowana. Nie jest więc kontrolowany podstawowy czynnik wpływający na pracę obudowy kotwiowej, a tym samym na stabilność wyrobiska i bezpieczeństwo pracy załogi.

## 2 PODSTAWY TEORETYCZNE PROWADZONYCH BADAŃ

Wszystkie właściwości dynamiczne struktur mechanicznych mają charakter wielkości rozproszonych w przestrzeni. Te właściwości to: masa, sztywność mechaniczna oraz tłumienie, odpowiedzialne odpowiednio za bezwładność, siły sprężystości oraz tarcie. Modelowanie rzeczywistej struktury mechanicznej jest stąd przedsięwzięciem bardzo złożonym lub wręcz niemożliwym dla opisu wzajemnego oddziaływania wszystkich właściwości mechanicznych badanej struktury mechanicznej ze sobą. Jednakże, w większości przypadków, satysfakcjonujące rezultaty mogą być osiągnięte, jeżeli podstawowe właściwości badanej złożonej struktury rozpatrywane są jako suma cech zbioru prostych elementów dyskretnych, na które ta struktura może być podzielona, a które właściwie powiązane mogą reprezentować z zadawalającą dokładnością jej charakterystyki dynamiczne.

### 2.1 Model modalny

Jedną z metod analizy właściwości mechanicznych struktur lub układów mechanicznych jest analiza modalna. Może być ona stosowana, jeżeli badana struktura mechaniczna spełnia następujące założenia:

- spełniona jest zasada liniowości, a więc dynamika może być opisana za pomocą liniowego układu równań różniczkowych,
- współczynniki równań opisujących dynamikę są niezmiennie w czasie pomiarów,
- badana struktura jest obserwowalna i istnieje możliwość pomiaru charakterystyk, których znajomość jest niezbędna do identyfikacji modelu,
- spełniona jest zasada wzajemności Maxwella, tzn. odpowiedź w  $i$ -tym punkcie na wymuszenie w  $j$ -tym punkcie jest równa odpowiedzi w  $j$ -tym punkcie na to samo wymuszenie w  $i$ -tym punkcie,
- tłumienie jest małe lub proporcjonalne.

Ostatni warunek jest istotny, gdy stosowane są metody identyfikacji parametrów modalnych dla jednego stopnia swobody, natomiast w praktyce dla struktur silnie tłumionych identyfikacja modelu możliwa jest przez zastosowanie technik opartych na metodzie najmniejszych kwadratów.

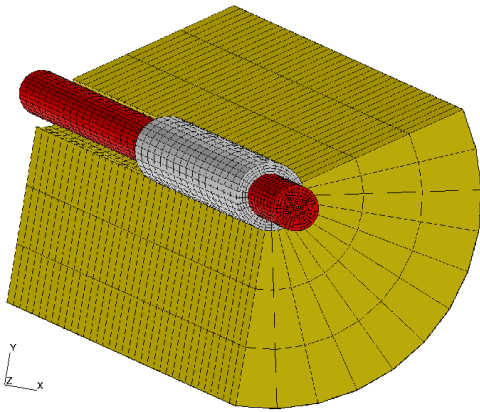
Model modalny zdefiniowany jest jako zbiór częstotliwości drgań własnych, współczynników tłumienia dla tych częstotliwości oraz postaci drgań (wektorów modalnych). Wielkości te z modelu strukturalnego układu można otrzymać poprzez rozwiązanie zagadnienia własnego. Stąd też często analizę modalną definiuje się jako rozwiązanie zagadnienia własnego dla badanej struktury mechanicznej.

### 2.2 Układy o wielu stopniach swobody

Podstawowym pojęciem związanym z analizą modalną jest liczba stopni swobody. Jest to minimalna liczba niezależnych współrzędnych, których znajomość jest konieczna do opisanie położenia układu w przestrzeni. Dla przykładu: liczba stopni swobody dla bryły sztywnej wynosi 6: trzy stopnie związane z przesunięciami wzdłuż poszczególnych osi układu współrzędnych oraz trzy związane z obrotami wokół tych osi. Każdy układ mechaniczny może być traktowany jako zbiór nieskończonej liczby małych brył sztywnych, z tego też względu może być on traktowany jako układ o nieskończonej liczbie stopni swobody. W praktyce wszystkie układy aproksymuje się układem o skończonej liczbie stopni swobody. Jest to konsekwencją budowy modeli układów mechanicznych, na podstawie których analizuje się ich ruch w określonym zakresie częstotliwości. Z liczbą stopni swobody związany jest wymiar macierzy mas, sztywności i tłumienia, jak również liczba teoretycznych częstotliwości drgań własnych i postaci drgań [9, 10, 12]. W praktycznych zastosowaniach stosuje się również modele zredukowane, gdzie zmniejszenie liczby stopni swobody wiąże się ze zmniejszeniem wymiaru macierzy mas, sztywności i tłumienia, jednakże taka redukcja nie może ograniczać się jedynie do eliminacji wybranych kolumn i wierszy macierzy mas, sztywności i tłumienia, gdyż w konsekwencji otrzymalibyśmy układ o innych właściwościach mechanicznych, lecz do redystrybucji parametrów opisujących masę, sztywność i tłumienie z redukowanych wierszy i kolumn do pozostałych. Bardziej trafnym określeniem jest więc tutaj kondensacja macierzy.

Na rys. 1 przedstawiono przykład układu o wielu stopniach swobody, który stanowi pręt stalowy (żerdź kotwiowa) przytwierdzony na określonym odcinku do górotworu z wykorzystaniem żywicy poliestrowej (wklejenie formułyje

określone warunki brzegowe). Układ ten był analizowany w trakcie prowadzonych badań.

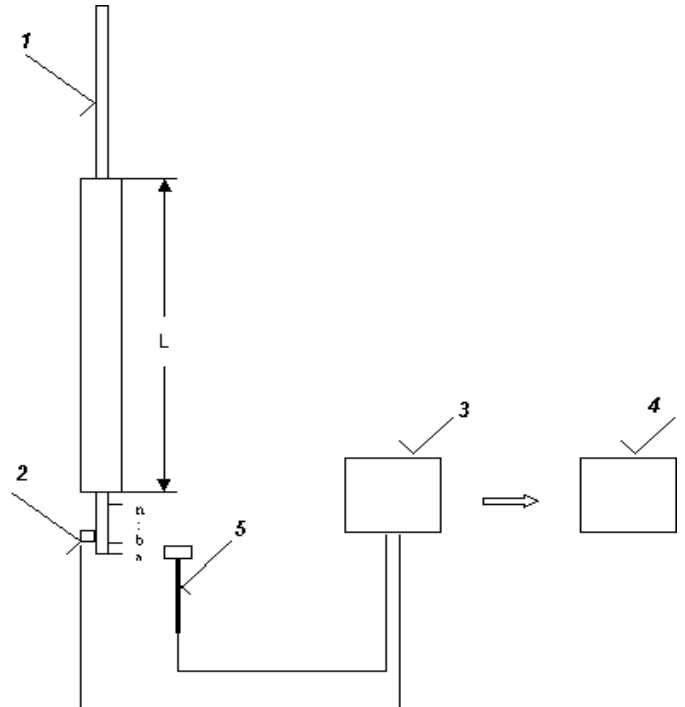


Rys. 1. Układ o wielu stopniach swobody – drgający pręt stalowy (żerdź kotwiowa) z zaznaczonymi warunkami brzegowymi (przytwierdzenie na określonym odcinku do górotworu, z wykorzystaniem żywicy poliestrowej).

### 3 METODA IDENTYFIKACJI CIĄGŁOŚCI WKLEJENIA ŻERDZI KOTWIOWYCH ZAMOCOWANYCH W GÓROTWORZE

Metoda identyfikacji ciągłości wklejenia żerdzi kotwiowych w górotworze realizowana jest poprzez wymuszenie drgań badanego obiektu z wykorzystaniem młotka udarowego wyposażonego w przetwornik siły umieszczony w głowicy młotka, oraz równoczesną rejestrację sygnału wymuszenia, pochodzącego z przetwornika siły, i sygnału odpowiedzi na to wymuszenie, pochodzącego z piezoelektrycznego przetwornika drgań. Kierunek wymuszenia jest prostopadły do osi symetrii żerdzi, oś główna przetwornika odbiorczego również jest prostopadła do osi symetrii żerdzi. Wymuszenie odbywa się dla kilku punktów rozmieszczonych na wystającym z górotworu odcinku żerdzi kotwiowej dla danego położenia przetwornika odbiorczego umiejscowionego na tymże odcinku żerdzi. Rejestrację sygnałów prowadzi się sekwencyjnie dla każdej pary punktów pomiarowych, wykorzystując skonstruowany system akwizycji danych. Dane zapisywane są w postaci plików w formacie UF (ang. *universal file*). Następnie dane importowane są do programu realizującego analizę modalną celem identyfikacji odpowiednich częstości własnych badanego obiektu, charakterystycznych dla danego rodzaju nieciągłości wklejenia. Otrzymane częstości własne porównywane są z wynikami teoretycznej analizy

modalnej realizowanej na modelu elementów skończonych badanego obiektu dla różnych warunków brzegowych odpowiadających różnym przypadkom nieciągłości wklejenia. Układ pomiarowy stosowany w metodzie przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Układ pomiarowy: (1) żerdź kotwiowa; (2) przetwornik drgań; (3) system akwizycji danych; (4) stacja robocza dla analizy modalnej; (5) młotek udarowy; (a-n) punkty wymuszenia, L – długość wklejenia.

Natomiast praktyczną realizację układu pomiarowego w części dotyczącej akwizycji i rejestracji danych pomiarowych w warunkach rzeczywistych stosowania samodzielnej obudowy kotwiowej prezentują rysunki 3 i 4.



Rys. 3. Przenośny system akwizycji i rejestracji funkcji przejścia – PSAR-FRF, realizacja badań w warunkach rzeczywistych stosowania samodzielnej obudowy kotwiowej.



Rys. 4. Wymuszanie drgań młotkiem udarowym, sygnał odpowiedzi mierzony piezoelektrycznym przetwornikiem drgań.

Zaletami metody jest możliwość oceny ciągłości wklejenia w dowolnym momencie po zamontowaniu kotwi, nieniszczący charakter metody oraz brak konieczności instalacji oprzyrządowania w górotworze.

Jednym z podstawowych warunków realizacji metody jest identyfikacja modelu modalnego badanej struktury. Model modalny struktury mechanicznej składa się zasadniczo z dwóch macierzy:

- macierzy fundamentalnej zawierającej częstości własne i współczynniki tłumienia drgań (parametry te zawarte są w wartościach własnych macierzy),
- macierzy modalnej zawierającej wektory własne drgań (postacie drgań).

Możemy więc konstruować model, zaczynając od identyfikacji pojedynczych wektorów modalnych, a bardziej złożony model (niekoniecznie kompletny) stanowiłyby zestawione razem współrzędne poszczególnych wektorów modalnych wraz z odpowiadającymi im częstościami drgań własnych i współczynnikami tłumienia.

Z pojedynczej charakterystyki funkcji przejścia  $H_{jk}(\omega)$ , gdzie  $j, k$  oznaczają odpowiednio punkty wymuszenia i odpowiedzi, możliwe jest obliczenie: częstości własnej, tłumienia oraz reszty modalnej dla  $r$ -tego modu [6, 7].

$$H_{jk}(\omega) \rightarrow \omega_r, \eta_r, {}_r A_{jk} \quad ; \quad r = 1, m \quad (1)$$

gdzie:  $\omega_r, \eta_r, {}_r A_{jk}, m$  oznaczają odpowiednio częstość drgań, współczynnik tłumienia, resztę modalną i liczbę modów drgań zidentyfikowanych w procesie analizy.

Aby otrzymać poszczególne elementy macierzy modalnej  $[\Phi]$ , czyli współrzędne wektorów modalnych  $\phi_{jr}$ , konieczne jest przeprowadzenie serii pomiarów funkcji przejścia kolejno w różnych punktach badanej struktury mechanicznej. Szczególnie ważnym jest tu pomiar odpowiedzi bezpośrednio w punkcie wymuszenia. Możemy wtedy otrzymać składowe  $r$ -tego modu drgań, znając resztę modalną  ${}_r A_{kk}$  w tym punkcie na podstawie zależności (2):

$$\phi_{kr}^2 = {}_r A_{kk} \quad (2)$$

Pozostałe współrzędne wektora modalnego mogą być obliczone z równania (3):

$$\phi_{jr} = \frac{{}_r A_{jk}}{\phi_{kr}} \quad (3)$$

gdzie:  $\phi_{kr}, \phi_{jr}$  – współrzędne wektora po jego znormalizowaniu.

Stąd dla pełnego obrazu drgań badanej struktury o  $n$  stopniach swobody potrzebny jest pomiar funkcji przejścia w  $n$  różnych punktach badanej struktury, włączając w to funkcję przejścia mierzoną w punkcie wymuszenia [10, 12]. Jest to równoważne pomiarowi funkcji przejścia będących elementami kolumny lub wiersza macierzy  $[H]$ . W praktyce często zasadnym jest zwiększenie liczby punktów pomiarowych i pomiar dodatkowych elementów macierzy, np. dodatkowego wiersza (lub kolumny).

W prowadzonych badaniach zasadniczym parametrem modalnym, który był brany pod uwagę dla rozróżnienia poszczególnych przypadków nieciągłości wklejenia, jest częstość drgań własnych. Postaci drgań własnych z oczywistych względów nie mogą być określone dla całej drgającej struktury (brak dostępu do części umiejscowionej w górotworze). Było to możliwe jedynie w warunkach laboratoryjnych. Celem zwiększenia dokładności metody pomiaru funkcji przejścia wykonywane były dla 5-7 punktów rozmieszczonych na wystającym z górotworu odcinku żerdzi. Zapewniało to obliczanie częstości drgań własnych z wykorzystaniem większej liczby równań oraz uśrednienie otrzymanych wyników metodą najmniejszych kwadratów. Dodatkowo można było w ten sposób uniknąć przypadkowego wymuszenia drgań w węzle określonej postaci drgań. Na rys. 5 i 6 przedstawiono przykłady wyników prowadzonych badań dla wklejenia

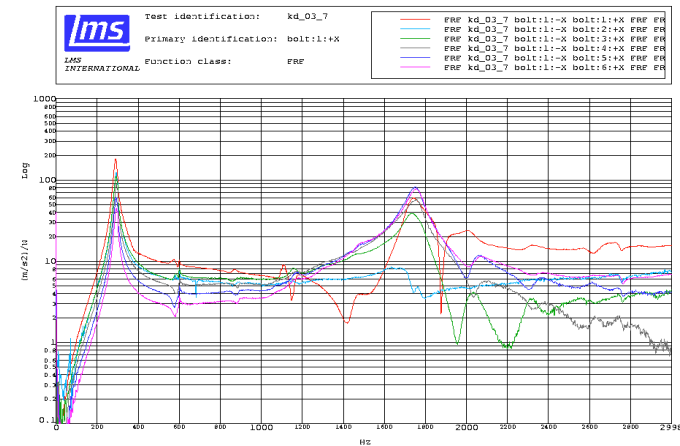
realizowanego w sposób kontrolowany w warunkach rzeczywistych stosowania samodzielnej obudowy kotwiowej.

#### 4 WYKONANIE OBLICZEŃ I WERYFIKACJA WARUNKÓW BRZEGOWYCH

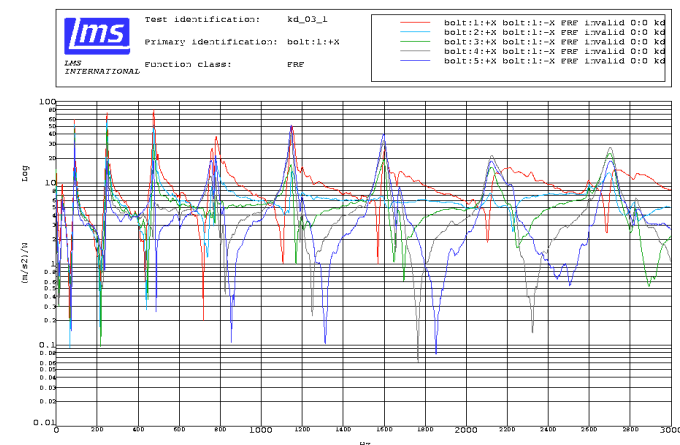
Proces dostrojenia modeli eksperymentalnego i teoretycznego realizowano dla przypadków, które analizowane były w rzeczywistych warunkach stosowania obudowy kotwiowej w wyrobiskach zakładów górniczych (dla przypadków, w których wklejenie prowadzone było w sposób kontrolowany). Wykonanie obliczeń, które miało na celu określenie wrażliwości odpowiedzi w poszczególnych punktach modelu (stopniach swobody) na zmiany wartości zbioru parametrów modelu (opisujących właściwości mechaniczne badanego obiektu, czyli: parametry materiałowe, przyjęty rodzaj tłumienia itp.), nie dało pozytywnych rezultatów. Brak możliwości dopasowania modeli eksperymentalnego i analitycznego poprzez zmiany parametrów modelu skłonił autora do nieznacznych modyfikacji przyjętych warunków brzegowych w modelu teoretycznym (długości odcinków, na których żerdź była wklejona), a które w praktyce mogły częściowo różnić się od założonych. Po szeregu przeprowadzonych w sposób iteracyjny zmian geometrii warunków brzegowych oraz towarzyszących im obliczeniach parametrów modalnych i funkcji przejścia osiągnięto zadawalającą zgodność dopasowania modeli. Stwierdzono, że ten sposób dopasowania jest efektywny dla całej grupy przypadków, uwzględniając zidentyfikowane dla danego przypadku częstotliwości własne. Uzasadniony jest również wniosek, iż parametry opisujące właściwości mechaniczne modelu elementów skończonych zostały właściwie określone już na etapie jego projektowania (parametry wyznaczone były empirycznie) i stąd wcześniejszy brak skuteczności dopasowania modelu przez ich modyfikację.

##### 4.1 Dopasowanie modeli modalnych eksperymentalnego oraz teoretycznego

Jednym z podstawowych zadań teoretycznej analizy modalnej jest dostrajanie modeli obliczeniowych (np. modeli elementów skończonych), które stanowią analityczny obraz rzeczywistych badanych obiektów, do modelu eksperymentalnego. Dostrojenie modeli wykonuje się, wykorzystując wyniki eksperymentalnej analizy modalnej. Wszelkie modyfikacje rzeczywistego



Rys. 5. Charakterystyki FRF dla poszczególnych punktów wymuszenia dla przypadku wklejenia na długości 1/2 długości żerdzi, zaczynając od calizny stropu.



Rys. 6. Charakterystyki FRF dla poszczególnych punktów wymuszenia dla przypadku wklejenia na długości 1/2 długości żerdzi, zaczynając od dna otworu.

Zasadniczy element identyfikacji nieciągłości wklejenia to porównanie wyznaczonych eksperymentalnie częstotliwości drgań własnych z bazą danych otrzymaną w wyniku teoretycznej analizy modalnej realizowanej na modelu elementów skończonych badanego obiektu dla różnych warunków brzegowych odpowiadających różnym przypadkom nieciągłości wklejenia. Model teoretyczny, aby mógł być stosowany jako baza odniesienia, musiał być dostrojony w oparciu o wyniki eksperymentu dla przypadków wklejenia prowadzonych w sposób kontrolowany.

obiektu mogą być wtedy opisane wprowadzonymi zmianami w modelu analitycznym [1].

Wyniki eksperymentalnej analizy modalnej w postaci charakterystyk funkcji przejścia są mierzone i rejestrowane w toku pomiaru. Dla porównywania modeli analitycznego i eksperymentalnego najbardziej dogodnie jest porównanie parametrów modalnych tych modeli. Wynika to z faktu, że obliczenie przebiegu funkcji przejścia dla modeli analitycznych wymaga wcześniejszej znajomości parametrów modalnych, a jej postać zależy od liczby modów drgań, które uwzględnione zostały w obliczeniach. Parametry modalne natomiast mogą być określane oddzielnie dla poszczególnych modów drgań w przyjętym zakresie częstotliwości, ograniczonym do zakresu użytecznego dla konkretnego testu. Z drugiej strony eksperymentalna identyfikacja parametrów modalnych wymaga wykonania koniecznych procedur obliczeniowych. Warunkiem jest tu posiadanie określonych mocy obliczeniowych i czasu. Pomimo tego wymagania, porównanie parametrów modalnych modelu eksperymentalnego i analitycznego jest jedną z najczęściej stosowanych obecnie metod dopasowania modeli.

W celu weryfikacji dopasowania modeli teoretycznego i eksperymentalnego najbardziej oczywistą czynnością jest porównanie zmierzonych częstotliwości własnych względem wartości obliczonych numerycznie (w oparciu o model elementów skończonych). Można takie porównanie zrealizować tabelarycznie oraz w formie wykresu. Wykres jest bardziej użyteczny, gdyż pozwala na określenie stopnia korelacji tych modeli oraz przedziału występujących rozbieżności. Ważnym jest jednak, aby zestawiane dane pochodziły od odpowiadających sobie postaci (modów) drgań, nie koniecznie kolejnych. Jeżeli modele są dobrze skorelowane ze sobą, to punkty wykresu, w którym na osiach oznaczone są odpowiadające sobie częstotliwości drgań własnych, powinny znajdować się na prostej przecinającej oś współrzędnych pod kątem około 45°. Duże rozproszenie punktów świadczy o poważnych błędach modelowania numerycznego lub błędach popełnionych w trakcie pomiarów. Jeżeli odchylenie punktów ma charakter systematyczny, świadczy to o występowaniu nieliniowości w badanej strukturze.

#### 4.2 Metody porównania modeli teoretycznego i eksperymentalnego, wyznaczanie korelacji funkcji przejścia

W przypadku dostrojenia modeli eksperymentalnego i analitycznego przez porównanie i wyznaczanie korelacji charakterystyk odpowiedzi badanego układu na wymuszenie może być to realizowane zarówno w dziedzinie czasu – odpowiedź impulsowa układu (IRF), jak i w dziedzinie częstotliwości – funkcja przejścia (FRF). W najprostszej formie stopień zgodności określany jest przez nałożenie pojedynczych charakterystyk otrzymanych dla obu dopasowywanych modeli. Warunkiem wykreślenia teoretycznych charakterystyk funkcji przejścia jest przyjęcie prawidłowych założeń dotyczących: rodzaju i stopnia tłumienia (co nie jest bezpośrednio częścią modelowania) i liczby wektorów modalnych, które uwzględnione będą w obliczeniach [10].

Podczas typowego testu modalnego, w przypadku impulsowego wzbudzenia drgań, wymuszenie wykonywane jest w wielu punktach badanego obiektu (dla testów z wzbudnikiem drgań zmieniane jest położenie przetwornika odbiorczego). Dla otrzymania stopnia korelacji i dopasowania modeli analitycznego i eksperymentalnego dla wymuszenia w punkcie  $j$  i odpowiedzi w punkcie  $k$  można zdefiniować parametr  $FRAC(j)_k$  (ang. *Frequency Response Assurance Criterion*) określony zależnością (4):

$$FRAC(j)_k = \frac{\sum_{i=1}^L |(xH_{jk}(\omega_i))(A H_{jk}^*(\omega_i))|^2}{\sum_{i=1}^L |(xH_{jk}(\omega_i))|^2 \sum_{i=1}^L |(A H_{jk}(\omega_i))|^2} \quad (4)$$

gdzie  $xH_{jk}$  jest funkcją przejścia dla modelu eksperymentalnego, natomiast  $A H_{jk}$  funkcją przejścia dla modelu analitycznego;  $i=1, L$  oznacza zakres częstotliwości, w którym dokonuje się obliczenia,  $j$  oznacza punkt wymuszenia,  $k$  – punkt odpowiedzi.

#### 4.3 Metoda dostrajania modeli w dziedzinie częstotliwości

Metody dostrajania modeli elementów skończonych na podstawie danych z eksperymentu podzielić można na:

- metody bezpośrednie dostrajania, w których poszczególne elementy macierzy mas i sztywności są dostrajane w oparciu o wyniki obliczeń i eksperymentu,
- metody pośrednie oparte na dopasowaniu właściwości fizycznych modelu.

Druga grupa metod dostrajania wydaje się być bardziej odpowiednia, ponieważ operacje wykonywane są wprost na wielkościach fizycznie występujących w danej strukturze.

Rozpatrując odpowiedź układu w dziedzinie częstotliwości i zakładając, że po pewnych modyfikacjach dostrojony model elementów skończonych poprawnie przedstawia zmierzone funkcje przejścia, równanie opisujące odpowiedź układu po i przed modyfikacją możemy przedstawić w postaci [9, 10]:

$$[Z_U(\omega)]\{H_X(\omega)\} = \{f\} = [Z_A(\omega)]\{H_A(\omega)\} \quad (5)$$

gdzie:

- $Z$  – macierz sztywności dynamicznej,
- $f$  – przyłożona siła,
- $X, A, U$  – symbole oznaczające odpowiednio model eksperymentalny, obliczeniowy i poprawiony obliczeniowy.

Odejmując od obu stron równania wyrażenie:  $[Z_A(\omega)]\{H_X(\omega)\}$ , dla przyłożonej siły jednostkowej równanie (5) może być przekształcone do postaci:

$$[\Delta Z(\omega)]\{H_X(\omega)\} = \{I\}_j - [Z_A(\omega)]\{H_X(\omega)\} \quad (6)$$

gdzie:

- $[\Delta Z(\omega)]$  – błąd macierzy sztywności dynamicznej,
- $j$  – lokalizacja punktu przyłożenia siły.

Mnożąc obie strony równania przez macierz funkcji przejścia dla modelu analitycznego otrzymamy:

$$[H_A][\Delta Z(\omega)]\{H_X(\omega)\} = \{H_A(\omega)\}_j - \{H_X(\omega)\} = \{\Delta H(\omega)\} \quad (7)$$

Prawa strona równania przedstawia brak dopasowania funkcji przejścia: analitycznej i eksperymentalnej.

Aby dojść do rozwiązania problemu, konieczny jest wybór parametrów wpływających na wielkość błędu. Wybieramy  $N_p$  parametrów modelu jako zmienne tworzące wektor  $\{P\}$ , które są przyczyną braku dopasowania modeli analitycznego i eksperymentalnego.

Parametry te można przedstawić w postaci bezwymiarowej:

$$p_i = (P_i - P_i^0) / P_i^0 \quad (8)$$

gdzie  $\{P^0\}$  są wartościami parametrów dla modelu analitycznego przed wprowadzeniem zmian. Parametry dopasowania  $p_i$  reprezentują częściowe zmiany zmiennych parametrów modelu. Szukana macierz sztywności dynamicznej dla dopasowywanego modelu elementów skończonych  $[Z_U]$  jest funkcją  $\{p\}$  i może być przedstawiona jako rozwinięcie w szereg Taylora względem macierzy sztywności dynamicznej początkowego modelu,  $[Z_A]$ , w sposób określony zależnościami:

$$[Z_U] = [Z_A] + [\Delta Z] = [Z_A] + \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial [Z]}{\partial p_i} p_i + O(p_i^2) \quad (9)$$

Pozostawiając jedynie składniki sumy dla pochodnej pierwszego rzędu, otrzymujemy:

$$[\Delta Z] = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial [Z]}{\partial p_i} p_i \quad (10)$$

Podstawiając wyrażenie (10) do równania (7), otrzymujemy po przekształceniach:

$$[S(\omega)]\{p\} = \{\Delta H(\omega)\} \quad (11)$$

gdzie:

$$[S(\omega)] = [H_A(\omega)] \left[ \frac{\partial [Z]}{\partial p_1} \{H_X(\omega)\} + \dots + \frac{\partial [Z]}{\partial p_{N_p}} \{H_X(\omega)\} \right]$$

Każdy wiersz macierzy  $[S(\omega)]$  określa wrażliwość odpowiedzi w poszczególnych stopniach swobody (współrzędnych) na zmiany wartości zbioru parametrów  $p$ . Równanie (11) przedstawia układ  $N$  liniowych równań dla  $N_p$  niewiadomych odnoszących się do pojedynczej częstotliwości  $\omega$ . Mierząc  $N_f$  punktów charakterystyki częstotliwościowej, można utworzyć  $N_f$  układów równań, co daje  $N_f \times N$  równań dla  $N_p$  niewiadomych. Taki nadmiarowy układ równań może być rozwiązany, np. z wykorzystaniem metody dekompozycji wartości osobliwych (ang. *SVD*), a otrzymany wynik jest rozwiązaniem uśrednionym metodą najmniejszych kwadratów. W przypadku braku wyników dla pewnych stopni swobody (brak wymuszenia dla tych stopni) wiersze równania (11) mogą być rozdzielone i można rozpatrzeć brak dopasowania modeli tylko dla punktów wymuszenia.

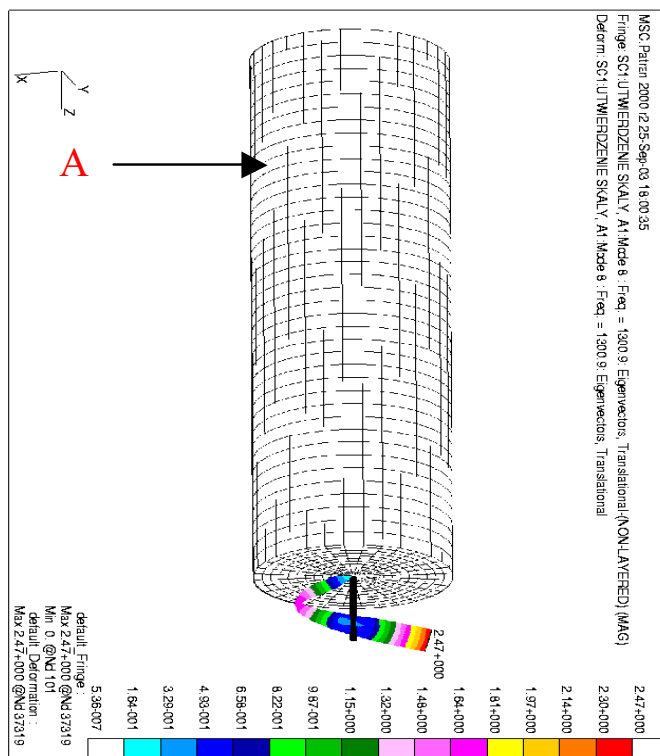
Jeżeli jednak nie zamierzamy zredukować liczby stopni swobody w modelu elementów skończonych macierz wrażliwości po lewej stronie równania (8) wymaga określenia odpowiedzi dla wszystkich stopni.

#### 4.4 Utworzenie i analiza modeli elementów skończonych dla badanych przypadków nieciągłości wklejenia

Odcinki, na których żerdź (stalowy pręt) jest wklejona w górotworze, formułują określone warunki brzegowe. Różne przypadki nieciągłości wklejenia mogą być wtedy opisane poprzez zmianę warunków brzegowych w modelu analitycznym. Następnie po dostrojeniu model elementów skończonych może stanowić odniesienie dla wyników badań eksperymentalnych nieznanymi przypadkami.

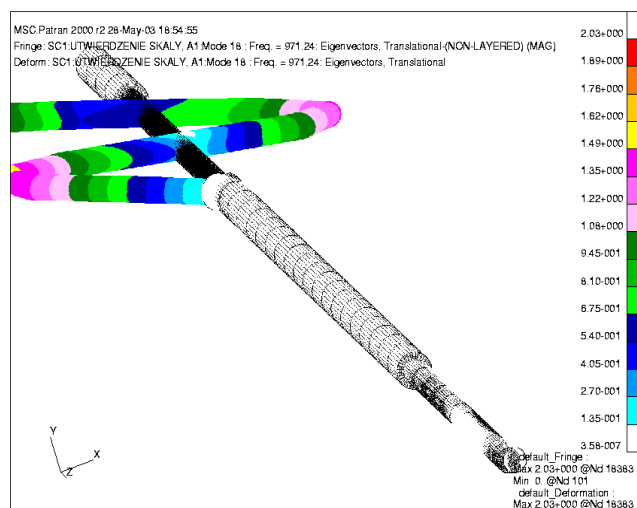
W badaniach własnych do budowy modeli elementów skończonych zastosowano oprogramowanie MSC/Patran. Program ten umożliwia tworzenie modeli elementów skończonych w oparciu o zaawansowane narzędzia programistyczne, służące do odwzorowania dowolnej geometrii obiektu. Budowę modelu rozpoczęto od wprowadzenia jego geometrii. Następnie dokonano podziału modelu geometrycznego na elementy dyskretne oraz przypisano im określone właściwości fizyczne, takie jak: gęstość materiału, moduł Younga, liczba Poissona, na podstawie których tworzone są macierze mas i sztywności. Podział modelu na grupy elementów skończonych daje możliwość przypisania określonych właściwości fizycznych do określonej grupy. Może to być wykorzystane w kolejnym etapie, którym jest dostrajanie modeli: teoretycznego i eksperymentalnego. Do obliczeń dynamicznych modeli elementów skończonych zastosowano program MSC/Nastran.

Na rys. 7 przedstawiono geometrię modelu elementów skończonych dla żerdzi kotłowej wklejonej w górotwór. Górotwór został zamodelowany w postaci walca. Dla przybliżenia warunków rzeczywistych węzły leżące na powierzchni walca zostały w modelu unieruchomione (położenie jednego z unieruchomionych węzłów zaznaczono literą A). Warstwę spoiwa na odcinkach, na których żerdź była mechanicznie związana z górotworem, zamodelowano w postaci wydrążonego walca o średnicy wewnętrznej równej średnicy żerdzi i średnicy zewnętrznej równej średnicy otworu w górotworze.



Rys. 7. Geometria modelu elementu skończonych dla żerdzi kotłowej wklejonej w górotwór, model utworzony w programie Patran.

Na rys. 8 przedstawiono przykład modelowania nieciągłości wklejenia. Widoczna jest warstwa spoiwa przylegająca do żerdzi (warstwa skały została graficznie zdjęta).



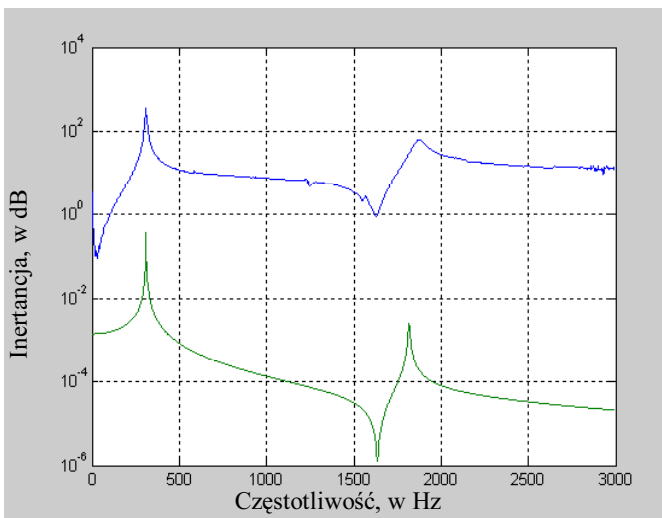
Rys. 8. Przykład nieciągłości wklejenia. Postać drgań charakterystyczna dla końcowego odcinka żerdzi jest również widoczna na odcinku wystającym z górotworu, co umożliwia pomiar. Koniec żerdzi nie jest mechanicznie związany ze skałą.

Modele elementów skończonych utworzone zostały dla różnych przypadków nieciągłości

wklejenia, które praktycznie można było zrealizować w rzeczywistych warunkach stosowania obudowy. Po utworzeniu modeli analitycznych (MES) realizowano teoretyczną analizę modalną.

W wyniku przeprowadzonej teoretycznej analizy modalnej, która obejmowała obliczenia częstotliwości drgań własnych oraz funkcji przejścia (dla wymuszenia w punkcie leżącym na wystającym z górotworu odcinka żerdzi), otrzymano dla każdego analizowanego przypadku zbiór częstotliwości drgań własnych charakterystycznych dla zamodelowanego rodzaju nieciągłości.

Na rys. 9 i 10 pokazano przykłady wyników realizowanej procedury dopasowania modeli. Przedstawiono wyniki zastosowania kryterium FRAC dla rozpatrywanych przypadków oraz zestawienie częstotliwości drgań własnych zidentyfikowanych dla obiektu rzeczywistego i analitycznego (MES), tabele 1 i 2.

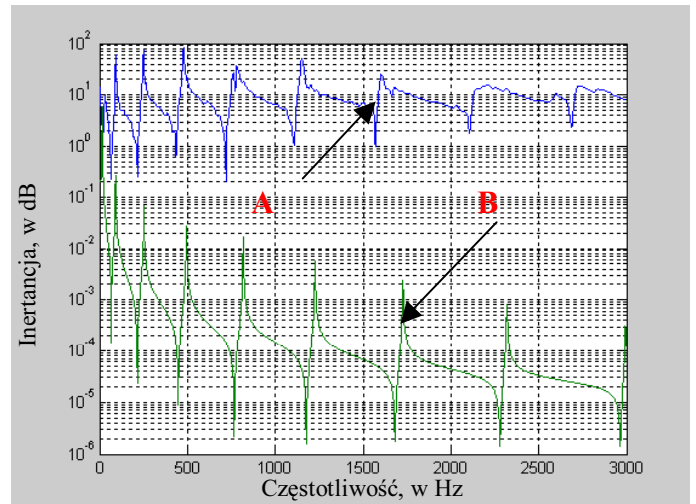


Rys. 9. Wklejenie na połowie długości żerdzi, zaczynając od calizny stropu. Porównanie funkcji przejścia zmierzonej i obliczonej w oparciu o MES.

Tabela 1. Porównanie zidentyfikowanych częstotliwości drgań własnych dla wklejenia typu 1100 (w połowie długości żerdzi, zaczynając od calizny stropu).

Lp.	Częstotliwości wyznaczone	
	teoretycznie	eksperymentalnie
	w Hz	
1	98,9	-
2	277,1	-
3	307,9	306,9
4	544,3	<b>585,2</b>
5	903,2	<b>924,4</b>
6	1356,7	-
7	1815,1	1872,5
8	1909,1	-

Poprawność dopasowania określana jest w oparciu o porównanie charakterystyk funkcji przejścia oraz wartości częstotliwości drgań własnych. W przypadku przedstawionym na rys. 7 i 11 są to częstotliwości odpowiednio 306,9 Hz i 1872,5 Hz, charakterystyczne dla drgań odcinka przed wklejeniem, oraz 585,2 Hz i 924,4 Hz (oznaczone w tabeli 1 czcionką pogrubioną) charakterystyczne dla drgań odcinka za wklejeniem.



Rys. 10. Wklejenie na połowie długości żerdzi, zaczynając od dna otworu. Porównanie funkcji przejścia zmierzonej i obliczonej w oparciu o MES.

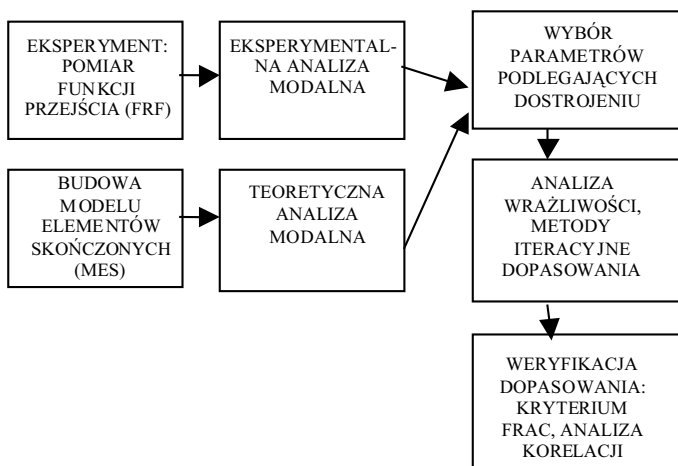
Tabela 2. Porównanie zidentyfikowanych częstotliwości drgań własnych dla wklejenia typu 0011 (na połowie długości żerdzi, zaczynając od dna otworu).

Lp.	Częstotliwości wyznaczone	
	teoretycznie	eksperymentalnie
	w Hz	
1	89,3	90,5
2	250,8	247,8
3	492,8	475,8
4	816,5	780,9
5	1225,3	1147,4
6	1725,6	1596,7
7	2317,3	2118,5
8	2992,3	2702,6

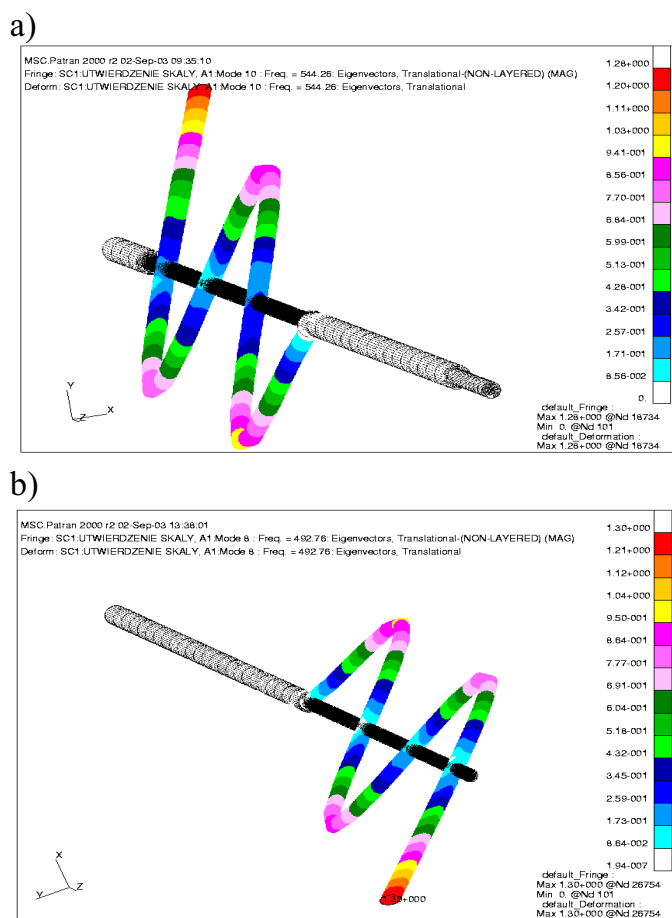
Na rys. 10 widoczne jest przesunięcie częstotliwości drgań własnych w górnym zakresie analizowanego pasma (odpowiadające sobie częstotliwości oznaczono literami A i B). Jednakże analiza współczynników korelacji dla poszczególnych przypadków wykazała dobre dopasowanie modeli eksperymentalnego i analitycznego. Oznacza to, że przesunięcie częstotliwości ma

charakter systematyczny i nie wnosi znaczącego wpływu do jakości dopasowania. Niemniej jednak świadczy to o istnieniu charakterystyki częstotliwościowej (np. nieliniowości) powodującej to odchylenie.

Proces dopasowania modeli eksperymentalnego i teoretycznego może być przedstawiony na schemacie blokowym, rys. 11.



Rys. 11. Proces dopasowania i walidacji modeli eksperymentalnego i teoretycznego.



Rys. 12. Przykłady postaci drgań wyznaczonych teoretycznie dla dwóch przypadków wklejenia na odcinku 1/2 długości żerdzi zaczynając: a) od calizny stropu, b) od dna otworu.

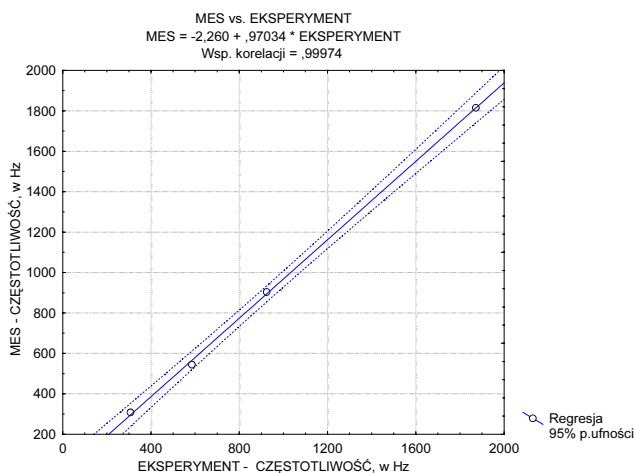
Na rys. 12 przedstawiono przykłady postaci drgań obliczonych w oparciu o model MES dla przypadków wklejenia na odcinku 1/2 długości żerdzi, analizowanych na rys. 5 i 6.

Przedstawione w tabelach 1 i 2 częstotliwości drgań żerdzi kotwiowej identyfikują nieciągłość wklejenia. Podkreślić należy, iż poszczególne zbiory częstotliwości, są charakterystyczne dla poszczególnych przypadków nieciągłości wklejenia.

Potwierdzenie skuteczności dostrojenia poszczególnych analizowanych przypadków przeprowadzono w oparciu o analizę współczynników korelacji pomiędzy modelami analitycznym i eksperymentalnym oraz charakterystyk regresji liniowej.

#### 4.5 Opracowanie statystyczne wyników badań, obliczenia współczynników korelacji oraz regresji liniowej

Jako wynik dopasowania modeli: analitycznego i eksperymentalnego obliczono współczynniki korelacji oraz charakterystyki regresji liniowej (dla poziomu ufności 95%) dla wyznaczonych eksperymentalnie oraz obliczonych w oparciu o model elementów skończonych częstotliwości drgań własnych [3]. Opracowanie statystyczne wyników badań jest podsumowaniem uzyskanych rezultatów. Przykład prowadzonych obliczeń przedstawiono na rys. 13.



Rys. 13. Współczynnik korelacji oraz wykres regresji liniowej dla wklejenia w połowie długości, zaczynając od calizny stropu.

W tabeli 3 zestawiono częstotliwości drgań własnych dla trzech przypadków o takim samym typie wklejenia (jak w przypadku analizowanym

na rys. 9) oraz dla porównania wyników obliczeń w oparciu o model elementów skończonych (model MES).

Tabela 3. Zestawienie częstotliwości drgań własnych dla trzech przypadków o takim samym typie wklejenia.

Lp.	Częstotliwości drgań własnych, w Hz			
	Eksperyment			MES
	Nr 7	Nr 17	Nr 9	
1	291,9	306,9	311,4	307,9
2	599,2	585,2	626,6	544,3
3	886,3	924,4	937,6	903,2
4	1867,4	1872,5	1863,6	1815,1

#### 4.6 Przesłanki do identyfikacji nieciągłości wklejenia dla nieznanego przypadku

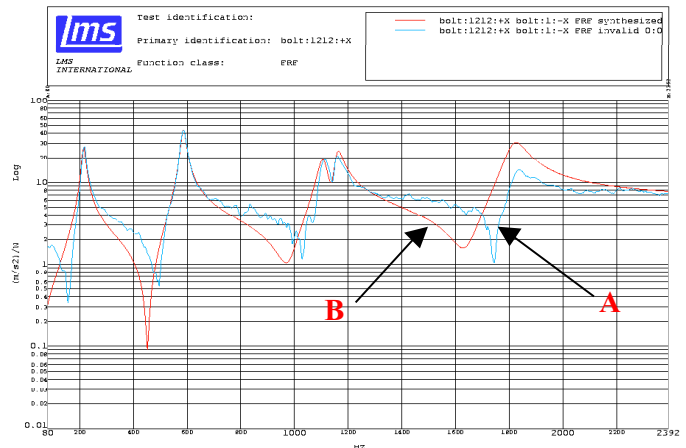
Badania prowadzone na wklejanych w sposób kontrolowany żerdziach kotwiowych w wyrobiskach chodnikowych dostarczyły cennych informacji dotyczących możliwości identyfikacji nieciągłości wklejenia oraz wpływu określonych rodzajów nieciągłości na zmiany ich parametrów modalnych. Po przeprowadzeniu procesu dostrojenia modeli analitycznego i eksperymentalnego dla różnych przypadków nieciągłości wklejenia przeprowadzono badania na żerdziach będących elementem samodzielnej obudowy kotwiowej w typowym wyrobisku chodnikowym. Wyniki analizy dla wybranego przypadku przedstawiono w tabeli 4 oraz na rys. 14. Dla identyfikacji nieciągłości wklejenia wyznaczone eksperymentalnie częstotliwości drgań własnych posłużyły jako dane wejściowe do procesu wyszukiwania przypadku analitycznego o określonych warunkach brzegowych (długości wklejenia), z wykorzystaniem wcześniej utworzonej bazy danych.

Tabela 4. Zidentyfikowane częstotliwości drgań własnych dla nieznanego przypadku.

Lp.	Częstotliwości wyznaczone	
	teoretycznie	eksperymentalnie
	w Hz	
1	197,1	214,6
2	552,8	585,7
3	1082,8	1106,9
4	-	1159,2
5	1800,4	1817,7

Częstotliwościom drgań własnych wyznaczonym eksperymentalnie odpowiadają częstotliwo-

ści modelu analitycznego o wklejeniu na długości 180 cm licząc od dna otworu (brak wklejenia 70 cm dla żerdzi o długości 2,5 m).



Rys. 14. Charakterystyki funkcji przejścia otrzymane dla pomiarów w warunkach ruchowych (nieznana nieciągłość wklejenia), charakterystyka zmierzona – oznaczenie literą A, charakterystyka obliczona na podstawie zidentyfikowanych parametrów modalnych – oznaczenie literą B.

Obserwowane na rys. 14 rozdwojenie częstotliwości 1106,9 Hz i 1159,2 Hz wytłumaczyć można niepełną symetrią drgań poprzecznych w osiach x i y (przyjmując oś z jako oś symetrii żerdzi kotwiowej).

## 5 PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE

- ◆ Duże zainteresowanie stosowaniem obudowy kotwiowej w przemyśle górniczym wynika z jej parametrów ekonomicznych. Zabezpieczenie wyrobiska taką obudową wymaga mniejszego nakładu czasu oraz zużytych materiałów, jest również technicznie dogodniejsze od innych sposobów zabezpieczenia. W górotworach charakteryzujących się mocnymi stropami obudowa kotwiowa stosowana jest powszechnie. W polskim górnictwie węglowym, gdzie stateczność stropu jest niska obudowa kotwiowa jest stosowana rzadziej, niemniej zainteresowanie jej stosowaniem wyraźnie wzrasta. Równocześnie na rynku usług obserwuje się brak nieniszczących metod badania poprawności zamocowania obudowy kotwiowej (żerdzi kotwiowych) Dotychczas opracowane metody nie dostarczają dostatecznie pewnych wyników. Dlatego też podjęto pracę nad nieniszczącą

metodą badania stopnia wklejenia żerdzi kotwiowych z wykorzystaniem nowoczesnych algorytmów przetwarzania sygnałów drganiowych.

- ◆ Opracowana metoda opiera się na wykorzystaniu: impulsowego wymuszenia drgań, analizy modalnej, utworzeniu modeli teoretycznych badanych struktur mechanicznych wraz z ich weryfikacją eksperymentalną dla najczęściej spotykanych przypadków nieciągłości wklejenia żerdzi.
- ◆ W badaniach laboratoryjnych wykazano związek przyczynowo skutkowy pomiędzy pobudzeniem kotwi do drgań poprzecznych a odpowiedzią charakteryzującą badaną strukturę. Ze względu jednak na duże różnice w sposobie wiązania elementów układu: kotew-spoivo-górotwór od warunków rzeczywistych wyniki badań laboratoryjnych nie mogły stanowić bazy odniesienia. W tym celu podjęto prace nad modelem teoretycznym. Do opracowania modelu teoretycznego zastosowano oprogramowanie Patran/Nastran, uwzględniając rzeczywistą geometrię badanych struktur mechanicznych, sposób ich połączenia oraz parametry materiałowe (wyznaczone również empirycznie). Prawidłowość tego wyboru potwierdzona została wynikami analiz korelacyjnych modelu teoretycznego i przypadków kontrolowanego wklejenia żerdzi kotwiowych do górotworu (w KD Barbara GIG), co jest jednoznacznym potwierdzeniem prawidłowości modelu.
- ◆ Dla realizacji części eksperymentalnej opracowano zestaw aparaturowy oraz program, napisany w środowisku LabVIEW, umożliwiające rejestrację i akwizycję funkcji przejścia (ang. FRF) w warunkach ruchowych. Równolegle zastosowano fabryczne oprogramowanie do analizy modalnej CADA-X.
- ◆ Parametry dynamiczne badanej struktury (żerdzi kotwiowej) determinowane są przez warunki brzegowe, które stanowią odcinki wklejenia żerdzi do górotworu.
- ◆ Warunkiem koniecznym do identyfikacji odcinków nieciągłości jest istnienie teoretycznego modelu badanej struktury uwzględniającego różne przypadki nieciągłości wklejenia (dla badań nieniszczących).
- ◆ Wyniki analizy modalnej zrealizowanej na modelu teoretycznym, dostrojone do modelu eksperymentalnego stanowią wzorzec odnie-

sienia dla identyfikowanych nieznanych przypadków.

- ◆ Wzorzec odniesienia może być stosowany dla różnych typów skał stropowych występujących w wyrobiskach korytarzowych.
- ◆ Dla określenia parametrów dynamicznych (modalnych) badanych obiektów bardziej odpowiednim jest wymuszanie drgań poprzecznych.
- ◆ Masa przetwornika odbiorczego znacząco wpływa na parametry dynamiczne badanych obiektów, stąd ważna jest jej minimalizacja.
- ◆ Zestaw pomiarowy (aparatura i oprogramowanie) został zweryfikowany w warunkach rzeczywistej kopalni dla przypadków o nieznanym stopniu wklejenia kotwi do górotworu. Uzyskane wyniki znajdują pokrycie w wielkościach opisywanych przez modele wzorcowe, co jest potwierdzeniem praktycznej przydatności aparatury, metody przetwarzania sygnałów oraz samych modeli wzorcowych.

## BIBLIOGRAFIA

- 1) Bochniak W., Uhl T., Lisowski W. 1999. Problemy dostrajania modeli elementów skończonych. Kraków: AGH.
- 2) Bishop R.E.D., Gladwell G.M.L. 1963. An investigation into the theory of resonance testing. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 225 A1055.
- 3) Brandt S. 1974. Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych doświadczalnych. PWN.
- 4) Brown D.L., Allemang R.J., Zimmerman R., Mergeay M. 1979. Parameter estimation techniques for modal analysis, SAE Paper no. 790221.
- 5) Byron F.W., Fuller R.W. 1975. Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej. PWN.
- 6) Dossing O. 1988. Structural Testing, Part I: Mechanical mobility measurements. Naerum: Bruel & Kjaer.
- 7) Dossing O. 1988. Structural Testing, Part II: Modal analysis and Simulation. Naerum: Bruel & Kjaer.
- 8) Ewins D.J., Gleeson P.T. 1982. A method for modal identification of lightly damped structures, Journal of Sound and Vibration, vol. 84 no.1, pp 57-79.
- 9) Ewins D.J. 2000. Modal Testing: theory, practice and application. Herts, England: Research Studies Press Ltd., Letchworth.
- 10) Maia, N.M.M., Silva, J.M.M. 1997. Theoretical and Experimental Modal Analysis.
- 11) Staniek A. 2005. Method for identification of grouting continuity of rock bolts. Archives of Mining Sciences, Vol. 50, Issue 3.
- 12) Uhl T. 1997. Komputerowo wspomaganą identyfikacją modeli konstrukcji mechanicznych. WNT.