



ZDOLNOŚĆ PROCESU

dr hab. inż. Adam Walanus, StatSoft Polska Sp. z o.o.

Pomiędzy producentem a jego klientem funkcjonuje umowa. W szerszym kontekście jest to umowa społeczna, w której uwzględniać się powinno koszty społeczne (Taguchi 1990).

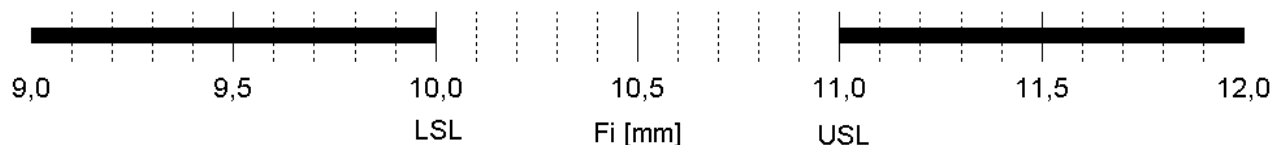
Umowa polega na tym, że dostawca dostarczy towar zamówiony przez odbiorcę. Dostawca nie jest jednak dla odbiorcy „czarną skrzynką”. Przy dzisiejszym stanie technologii jest to niemożliwe, ponieważ niemożliwe jest pełne przetestowanie produktu przy odbiorze. Naturalne jest więc, że odbiorca interesuje się technologią dostawcy. Odbiorca chce wiedzieć, jaka jest „zdolność” dostawcy do spełnienia jego wymagań.

Specyfikacja produktu

Produkt będący przedmiotem umowy cechuje się pewną wielkością. Produkt może oczywiście mieć wiele cech, ograniczmy się jednak do sytuacji, w której tylko jedna właściwość jest krytyczna, decydująca o przydatności produktu dla odbiorcy. Ta krytyczna właściwość produktu ma pewną miarę.

Niech przykładowym produktem będzie uszczelka pompy hamulcowej, a jej krytyczną właściwością średnica wewnętrzna. Średnica ta powinna wynosić 10,5mm.

W mechanice i w innych dziedzinach już od początku epoki industrialnej wiadomo było, że nie da się zrobić podkładki o średnicy wewnętrznej dokładnie równej 10,5mm. Tak więc zamawiamy u producenta podkładkę o średnicy $10,5 \pm 0,5$ mm. Żądamy prostej rzeczy: wszystkie podkładki mają mieć średnicę zawartą w przedziale od 10,0mm do 11,0mm. Warto w tym momencie zwrócić uwagę na pytanie, czy rzeczywiście podkładka o średnicy 10,01mm jest tak samo dobra jak podkładka nominalna 10,50mm. Na pewno wolimy tę drugą. Wrócimy do tej kwestii później.



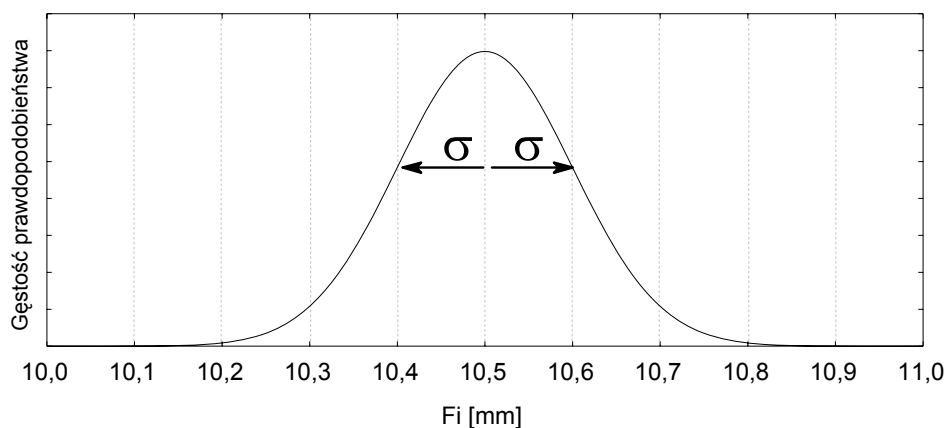


Dolną i górną granicę średnicy podkładki nazywamy, odpowiednio, dolną i górną granicą specyfikacji. Stosuje się tu angielskojęzyczne skróty LSL i USL (Lower, Upper Specification Limit).

Proces

Proces produkcji podkładek podlega wpływom wielu niekontrolowanych czynników, które powodują, że nie każda podkładka ma średnicę 10,5mm (tak naprawdę, żadna podkładka nie będzie miała dokładnie 10,5mm). Jeżeli godzimy się z faktem (z faktem trudno się nie pogodzić), że mamy pewien rozrzut średnic, to musimy przynajmniej umieć ten rozrzut ocenić. Powinna to być powtarzalna, dobrze zdefiniowana, ilościowa ocena (słowo pomiar tu się nie nadaje).

Proces produkcji jest losowy i jego wynik jest losowy. Wielkości losowe (np. średnica podkładki) opisywane są przez rozkłady prawdopodobieństwa. Najważniejszym rozkładem, najczęściej dającym się zastosować w praktyce jest rozkład normalny.



Rozkład normalny (inne rozkłady również) ma pewną szerokość. Miarą tej szerokości jest tzw. odchylenie standardowe, oznaczane najczęściej grecką literą sigma σ . Na powyższym wykresie widoczny jest rozkład normalny o średniej równej 10,5mm i $\sigma=0,1$ mm.

Specyfikacje (10,0mm, 11,0mm) na powyższym rysunku znalazły się na brzegach wykresu. Widać, że cały proces swobodnie mieści się w specyfikacji.

Znajomość losowych cech procesu polega na:

- ◆ znajomości rozkładu (w tym przykładzie mamy rozkład normalny),
- ◆ znajomości odchylenia standardowego, czyli σ (tu $\sigma=0,1$ mm),
- ◆ znajomości średniej (tu mamy $\bar{x}=10,5$ mm).

Kolejność punktów odpowiada statystyce. Mechanik najpierw powie, jaka ma być średnia, potem jaka sigma, a na końcu interesowałby się rozkładem. Statystyk natomiast wie, że mówienie o sigmie bez znajomości rozkładu jest nadużyciem. A mówienie o średniej bez znajomości rozrzutu (σ) jest fantazjowaniem.



Jak widać z powyższego wykresu, odchylenie od średniej w prawo i w lewo o σ nie wyczerpuje całej zmienności, jaka wynika z rozkładu prawdopodobieństwa. Z wykresu widać, że możemy otrzymać średnice od 10,2mm do 10,8mm, czyli $\pm 3\sigma$ wokół średniej. Oczywiście są to pozory, bo jeśliby powiększyć wykres, to okazałoby się, że i 10,9mm jest możliwe, a nawet 11,5 itd., bez końca.

W zakresie $\pm 3\sigma$ wokół średniej zawarte jest **99,73%** prawdopodobieństwa. Powiedzmy, że to jest „praktycznie wszystko”. Konwencja

$$\pm 3\sigma$$

jest bardzo dobrze ugruntowaną w praktyce przemysłowej zasadą. Ma ona długą historię i dobre uzasadnienie w statystyce.

Wskaźniki zdolności

Pojęcie zdolności oznacza tu zdolność procesu do spełnienia wymagań określonych w specyfikacji. Trzeba więc połączyć dwa powyższe punkty, miarę procesu ze specyfikacją.

Specyfikacja określona jest zwykle dwiema liczbami LSL i USL (w bieżącym przykładzie LSL=10,0mm, USL=11,0mm). Wartości te określają dopuszczalny zakres zmienności USL-LSL=1,0mm.

Proces ma swoją szerokość; na mocy konwencji jest to $\pm 3\sigma$, a więc w tym przypadku:

$$\pm 3\sigma = \pm 3 * 0,1\text{mm} = \pm 0,3\text{mm} = 0,6\text{mm}.$$

Symbol ± 3 oznacza „3 w prawo od średniej i 3 w lewo”, czyli razem 6.

Ponieważ $0,6\text{mm} < 1,0\text{mm}$, stwierdzamy, że proces jest zdolny spełnić wymagania klienta.

Wskaźniki zdolności nie mają jednak charakteru miary alternatywnej: zgodny – niezgodny. Wskaźniki te mają charakter ilościowy, liczbowy.

Zdolność procesu definiuje się jako iloraz

$$(USL-LSL)/(6\sigma).$$

W bieżącym przykładzie mamy $1\text{mm}/0,6\text{mm}=1,67$, czyli dobrą zdolność.

Tak określony wskaźnik nazywany jest zdolnością potencjalną i oznaczany przez C_p (od *capability* = zdolność). Tak więc:

$$C_p = (USL-LSL)/(6\sigma).$$

W przypadku gdy szerokość procesu jest równa zakresowi specyfikacji, otrzymujemy $C_p=1$. Taka wartość wskaźnika zdolności odpowiada konwencji $\pm 3\sigma$ jest to wyjściowa,



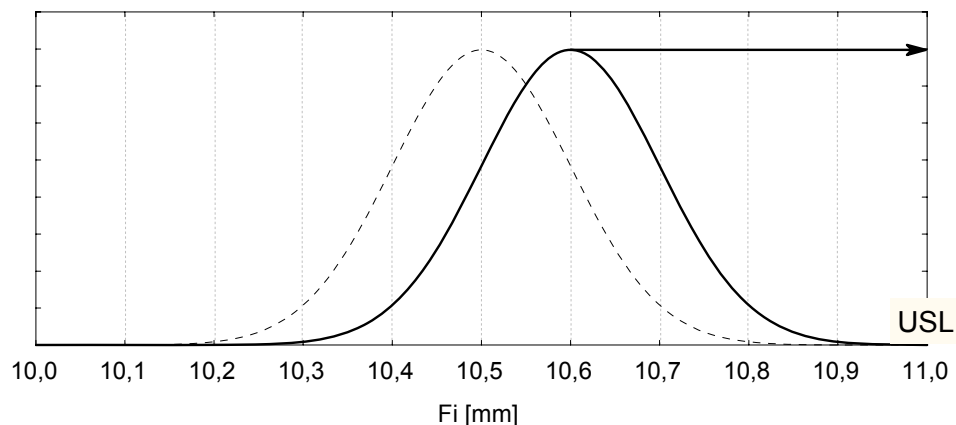
przyzwoita zdolność. Raczej nie należy schodzić poniżej 1. Mając $C_p=1$, liczyć się jednak trzeba z niezgodnościami w ilości 0,27%.

Z rozkładu normalnego wynika, że frakcja niezgodności bardzo szybko maleje ze wzrostem C_p (patrz tabela 1).

Tabela 1. Frakcja niezgodności (w ppm, czyli na milion) w zależności od zdolności procesu.

Zdolność	Niezgodności
1	2700 ppm
1,33	63 ppm
1,67	0,57 ppm
2	0,002 ppm

Jak dotąd milcząco założono, że proces jest **wycentrowany**, tzn. średnia procesu jest dokładnie równa jest średniej z granic specyfikacji, czyli leży w środku zakresu specyfikacji. Oczywiście nie zawsze musi tak być. Proces może przesunąć się w jedną lub w drugą stronę.



Proces na powyższym rysunku przesunął się w prawo, jego średnia wynosi 10,6mm. Szerokość procesu nie zmieniła się, ale musimy zainteresować się zbliżaniem się procesu do USL. Dlatego potrzebujemy dodatkowego wskaźnika zdolności: C_{pk} :

$$C_{pk} = \text{mniejsza z dwóch liczb: } (USL - \bar{x}) / (3\sigma), (\bar{x} - LSL) / (3\sigma).$$

W przykładzie z rysunku $(USL - \bar{x}) / (3\sigma) = 0,4\text{mm} / 0,3\text{mm} = 1,33$, natomiast $(\bar{x} - LSL) / (3\sigma) = 2$. Oczywiście $1,33 < 2,0$ więc bierzemy 1,33 i stwierdzamy, że $C_{pk} = 1,33$, co i tak nie jest najgorszym wynikiem.

Zauważmy, że C_{pk} nigdy nie będzie większe od C_p ; wynika to z samych wzorów. Dla procesu wycentrowanego $C_{pk} = C_p$. Porównanie C_p z C_{pk} pozwala ocenić wycentrowanie procesu; jeżeli oba wskaźniki są dość podobne, to proces jest wycentrowany, jeżeli różnią się o 0,33, to proces przesunięty jest o 1σ .



Wskaźnik zdolności C_{pk} jest jedynym możliwym do obliczenia wskaźnikiem dla procesu o jednostronnej specyfikacji. Możemy np. produkować liny, które mają określoną minimalną wytrzymałość (LSL), a nie mają maksymalnej. Wtedy daje się policzyć tylko C_{pk} .

Fracja niezgodności jest w takim przypadku dwa razy mniejsza niż dla C_p (patrz niżej, tabela 2), bo tylko jeden „ogon” rozkładu normalnego wystaje poza specyfikację.

Tabela 2. Fracja niezgodności w zależności od zdolności procesu, dla specyfikacji jednostronnej.

Zdolność, C_{pk}	Niezgodności
1	1350 ppm
1,33	32 ppm
1,67	0,57 ppm
2	0,001 ppm

Wskaźnik C_{pk} jest bezpośrednim wskaźnikiem aktualnej zdolności procesu. Jednak wskaźnik C_p charakteryzuje proces w sposób bardziej podstawowy. Sigma procesu jest fundamentalną cechą procesu. Sigmę procesu, która decyduje o wartości C_p , zwykle trudno zmniejszyć. Natomiast wycentrowanie procesu przeważnie daje się dość łatwo korygować.

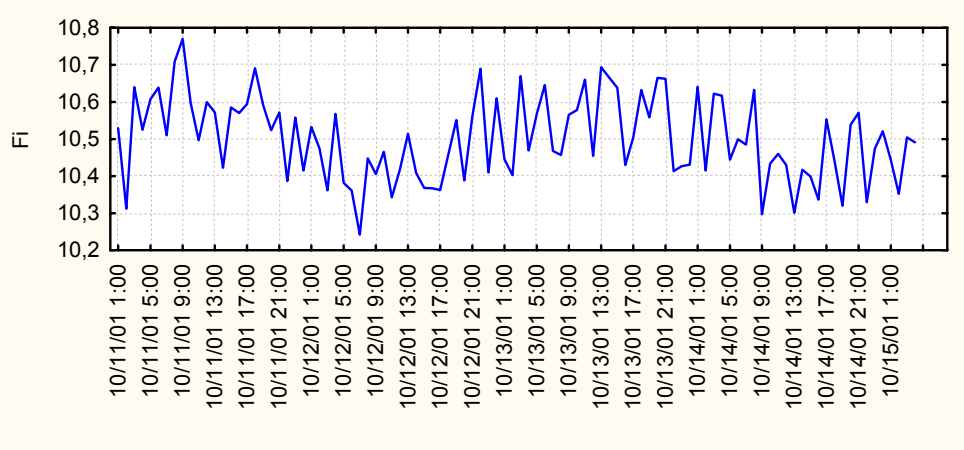
Tak więc wskaźnik C_p podsumowuje ogólną, potencjalną zdolność procesu, a wskaźnik C_{pk} jego bieżący stan.

Ocena sigmy procesu; zmienność krótko- i długookresowa

We wzorach na wskaźniki zdolności procesu występuje sigma procesu (σ). Sigma procesu jest jego podstawową charakterystyką. Chcielibyśmy, by była jak najmniejsza (zmienność to wróg nr 1).

Skąd wiemy, jaką sigmę ma nasz proces? Na każdym, nawet najbardziej podstawowym kursie statystyki (w firmie StatSoft) dowiemy się, że sigmę, czyli rozrzut, ocenia się, obliczając odchylenie standardowe s . Tak jest w istocie. Obliczyć trzeba s , założyć, że $\sigma=s$, i wstawić do wzorów na wskaźniki zdolności.

To byłoby wszystko, gdybyśmy mieli proces absolutnie stabilny w czasie. To znaczy proces dający pewien rozrzut σ , ale o nieziennej w czasie średniej. Inaczej niż na poniższym rysunku i inaczej niż w rzeczywistości, gdyż nie ma procesów absolutnie stabilnych.



Praktyka pokazuje, że trzeba się zastanowić nad dwoma typami zmienności: nad zmiennością szybką i wolną, albo inaczej: krótkoterminową i długoterminową. Na powyższym wykresie mamy obraz procesu na podstawie codziennych pomiarów. Widać tam zmienność z godziny na godzinę, od pomiaru do pomiaru, czyli zmienność krótkoterminową. Widać jednak również dodatkową zmienność długoterminową. Na wykresie są dwa okresy ogólnie niższych wartości F_i i dwa okresy wyższych wartości. Charakterystyczny jest poranny skok w dniu 14 października (godz. 9:00), ze średniej 10,5mm na 10,4mm.

Jeżeli obliczać będziemy odchylenie standardowe co zmianę, na podstawie ośmiu pomiarów, to uwzględnimy tylko zmienność krótkookresową. Jeżeli weźmiemy pomiary z całego miesiąca to w obliczonym s uwzględnione zostaną obie zmienności. To miesięczne odchylenie standardowe nazwać można długoterminowym i oznaczyć s_{LT} (long-term). Odchylenia obliczanych co zmianę, po miesiącu mamy 90; obliczamy z nich średnią i nazywamy ją s_{ST} (short-term).

Odchylenie standardowe s_{LT} jest miarą całkowitej zmienności, w związku z tym s_{LT} nigdy nie jest mniejsze od s_{ST} (pomijając losową zmienność samych estymatorów s). Odchylenie s_{LT} jest bardziej realistyczną oceną zmienności procesu. Jeżeli s_{LT} jest dużo większe od s_{ST} , to proces jest bardzo niestabilny.

Warto zauważyć, że wartość s_{ST} otrzymujemy z kart kontrolnych, niezależnie od tego, czy jest to karta $X\text{-}\bar{x}/s$, $X\text{-}\bar{x}/R$ czy karty ruchomego R , czy s . Dlatego s_{ST} nazywane jest też odchyleniem wewnątrzpróbkowym.

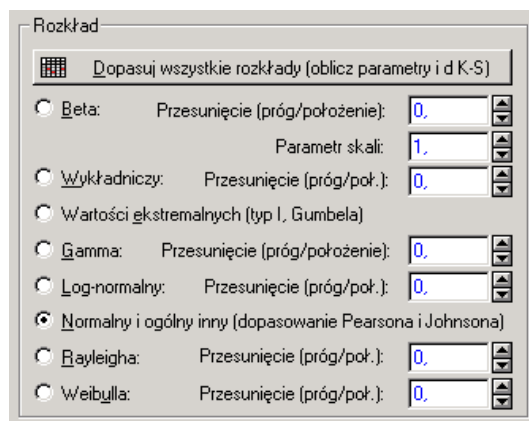
Wróćmy do wskaźników zdolności. Z zasady wskaźniki C_p i C_{pk} obliczane są na podstawie s_{ST} , czyli przy założeniu, że $\sigma = s_{ST}$. Jeżeli w powyższych wzorach na C_p i C_{pk} użyjemy s_{LT} jako oceny sigmy ($\sigma = s_{LT}$), to otrzymamy wskaźniki zwane wskaźnikami wykonania. Oznaczone one są przez P_p i P_{pk} .

Rozkłady inne niż normalny

Niestety, czasem zdarza się, że nasza krytyczna właściwość procesu podlega jakiemuś innemu rozkładowi prawdopodobieństwa niż rozkład normalny. Co wtedy? Są trzy drogi.



1. Przekształcamy zmienną tak, żeby już podlegała rozkładowi normalnemu. Bardzo często wystarczy obliczyć logarytm ze zmiennej aby otrzymać zmienną normalną. Oczywiście przetransformować trzeba też specyfikacje, np. $LSL_{log} = \log(LSL)$.
2. Dopasujemy tzw. rozkład ogólny, inny niż normalny. Oczywiście zrobimy to w programie *STATISTICA*, w module Analiza procesu.
3. Wiemy, jaki mamy rozkład, i po prostu wybieramy go dla analizy zdolności.



Skąd wiemy, że mamy rozkład inny niż normalny?

- ◆ Histogram z dopasowanym rozkładem normalnym wygląda nie najlepiej (musimy jednak mieć raczej sporo pomiarów).
- ◆ Na wykresie normalności punkty nie układają się wzdłuż prostej.
- ◆ Wykazał to test Kołmogorowa-Smirnowa albo któryś z innych „regularnych” testów statystycznych.
- ◆ Współczynniki skośności i kurtozy (patrz *Statystyki opisowe*) są wyraźnie różne od zera.

Jak *STATISTICA* oblicza C_p i C_{pk} , jeżeli rozkład nie jest normalny? Nie da się już wtedy dosłownie stosować zasady $\pm 3\sigma$. Szerokość procesu określa się w tych przypadkach tak, by zachować prawdopodobieństwo 99,73%. Tak by przy $C_p = C_{pk} = 1$ frakcja braków pozostała równa 2700 ppm. Gdybyśmy „na siłę” obliczali wskaźniki zdolności w zwykły sposób, ignorując niezgodność danych z rozkładem normalnym, wynik będzie niepewny, możemy otrzymać C_p i C_{pk} zdecydowanie zawyżone (z reguły), jak i zaniżone (na naszą niekorzyść).

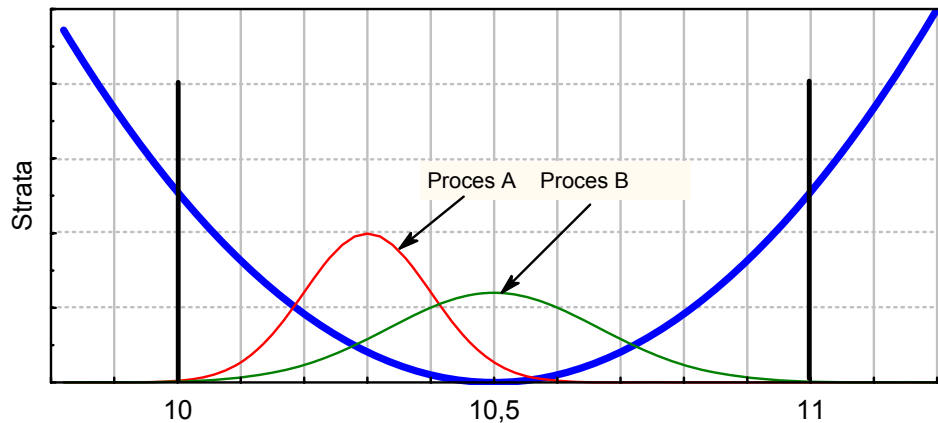
Funkcja strat Taguchiego

Wszystkie wspomniane wyżej cztery wskaźniki zdolności zakładają, że to, co mieści się wewnątrz specyfikacji, jest dobre, a wszystko poza specyfikacją jest zupełnie do wyrzucenia. W życiu nigdy tak nie jest. Wszystko może być trochę mniej lub trochę bardziej dobre (albo złe).

Model oceny procesu z uwzględnieniem płynnego przejścia od zgodności z wartością nominalną do niezgodności opracował Taguchi. Określa się w tym podejściu funkcję



straty, czyli zależność straty (poniesionej przez klienta) od wielkości odchyłki od wartości nominalnej. Nie ma tu już LSL i USL, zamiast nich jest współczynnik paraboli, który powoduje, że jest ona bardziej lub mniej stroma.



Jeżeli z analizy ekonomicznej wynika, że przy $F_i=10\text{mm}$, czyli przy odchyleniu o $0,5\text{mm}$, strata wynosi $1,20\text{ zł}$, to model jest już zdefiniowany: $\text{Strata}=1,20*((F_i-10,5)/0,5)^2$. Model z parabolą dotyczy granic dwustronnych, ale można wziąć inne funkcje, niesymetryczne.

Literatura

1. G. Taguchi, *Introduction to Quality Engineering*, Asian Productivity Organization, New York, 1990.
2. T. Greber, *Statystyczne sterowanie procesami - doskonalenie jakości z pakietem STATISTICA*, StatSoft, Kraków, 2000.
3. A. Iwasiewicz, *Zarządzanie jakością*, PWN, Warszawa - Kraków, 1999.
4. A.D. Aczel, *Statystyka w zarządzaniu*, PWN, Warszawa, 2000.
5. D.C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, Willey, New York, 1997.
6. J. Mazurkiewicz, J. Kliś, A. Magner, *Współczynniki zdolności procesu i związki z rozkładem normalnym*, „Problemy Jakości”, 2001, nr 9.
7. R. L. Mason, J. C. Young, *Variation in SPC*, „Quality Progress”, 2002, nr 4.