

METODY STATYSTYCZNEGO STEROWANIA JAKOŚCIĄ

*prof. dr hab. inż. Jacek Koronacki, Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej
i Zarządzania pod auspicjami Polskiej Akademii Nauk*

Uwagi wstępne

Tekst ten należy traktować jako drugą część opracowania *Statystyka w kompleksowym zarządzaniu jakością*.

Sterowanie jakością to wg normy terminologicznej PN-ISO 3534:2 metody i działania stosowane w celu spełnienia wymagań jakościowych. Dziś musimy dodać, iż spełnianie wymagań należy traktować dynamicznie – nie chodzi o wymagania raz na zawsze ustalone przez takie czy inne specyfikacje, lecz o stałą poprawę jakości procesów oraz produktów lub usług. Statystyczne sterowanie jakością to po prostu część sterowania jakością korzystająca z technik statystycznych.

Zadania spełniane w ramach tego działu sterowania jakością można z grubsza podzielić na następujące:

- ◆ statystyczne sterowanie procesem;
- ◆ analiza zdolności procesu lub maszyny;
- ◆ kontrola odbiorcza;
- ◆ analiza pomiarów;
- ◆ planowanie doświadczeń i ocena ich wyników.

Statystyczne sterowanie procesem (w skrócie SPC od terminu angielskiego *statistical process control*) to bieżąca – czyli realizowana w rzeczywistym czasie przebiegu procesu – kontrola procesu, służąca wykrywaniu jego ewentualnych rozregulowań i w konsekwencji służąca stałej poprawie jakości procesu. Często mówi się, że w ramach wąsko rozumianego SPC słucha się tylko *głosu procesu* – nie pytamy, czy proces realizuje zadanie, które chcielibyśmy by realizował, lecz badamy co i z jaką zmiennością proces realizuje. Jeśli jest to proces toczenia wałków, pytamy np. o to, jakie są średnice toczonych wałków, jaka jest średnia wartość owych średnic i jakie jest rozproszenie otrzymywanych wartości średnic. Interesuje nas stabilność procesu toczenia, a nie np. to jak się ma średnia wartość średnic do ich wartości pożądanej (nominalnej). Analiza zdolności procesu odpowiada na pytanie na ile możliwe jest realizowanie przez dany proces zadania, którego wykonaniu ma ten proces służyć (stosując odpowiednie miary odpowiadamy np. jaka jest zdolność procesu do toczenia wałków o danych specyfikacjach). Kontrola odbiorcza służy np. zapewnieniu by ryzyko odbiorcy (prawdopodobieństwo przyjęcia partii wyrobów, gdy ich poziom jakości jest niezadowolający) oraz ryzyko dostawcy (prawdopodobieństwo odrzucenia partii



wyrobów, gdy ich poziom jakości jest zadowalający) pozostawały w ustalonych granicach. Analiza pomiarów bada jakość pomiarów. Bez znajomości stopnia wiarygodności dokonywanych pomiarów niemożliwe jest odpowiedzialne wnioskowanie na podstawie otrzymywanych wyników pomiarów. Planowanie doświadczeń i ocena ich wyników to zestaw statystycznych technik, które najpierw pozwalają zaplanować doświadczenie, dające możliwie najlepszy opis związków między zmiennymi analizowanego procesu, i które następnie pozwalają zaproponować pożądaną zmianę tego procesu (prostym przykładem może być obróbka cieplna pewnych odlewów, zadaniem dobrać czasu nagrzewania odlewów, temperatury pieca oraz czasu utrzymania temperatury w piecu, zwiększających wytrzymałość odlewów na zginanie).

Często analizę zdolności procesu lub maszyny, kontrolę odbiorczą i analizę pomiarów przedstawia się jako części dziedziny SPC. Czyni się tak, ponieważ wszystkie wymienione dziedziny są bezpośrednio związane z analizą zmienności procesu. Z drugiej strony, na przykład wstępna analiza zdolności (por. ostatni rozdział tego opracowania) zawiera również analizę innych charakterystyk procesu, nie tylko jego zmienności.

W dalszym ciągu niniejszego opracowania krótko omówione są karty kontrolne, czyli podstawowe narzędzia SPC, oraz – w jeszcze większym skrócie -- omówiona jest analiza zdolności procesu. Opracowanie nie jest poradnikiem jak z omawianych metod korzystać w praktyce, choć nawiązuje do tego kręgu zagadnień.

Podstawowe karty kontrolne

Ogólne zasady konstrukcji karty:

- ♦ Karta kontrolna obrazuje dane lub podzbiory danych, wykreślane w funkcji czasu, z linią centralną pokazującą ogólną wartość średnią tych danych. (Zamiast wartości średniej, linia centralna może pokazywać medianę.)
- ♦ Granice kontrolne są liniami pokazującymi granice naturalnej zmienności. Nanoszone są w odległości trzech odchyłeń standardowych (3σ) od linii centralnej (sposób obliczania tej odległości podany jest niżej). Obserwacje pochodzące z procesu stabilnego (w stanie statystycznego uregulowania) pozostają między granicami kontrolnymi. Pojawienie się wyniku obserwacji poza pasem stabilności procesu (zmienności własnej) jest sygnałem. Sygnałem jest także ułożenie się wyników obserwacji w jedną ze specyficznych konfiguracji, mimo że żaden z wyników nie leży poza pasem stabilności (są to tzw. seryjne sygnały rozregulowania).
- ♦ Specyfikacje, granice tolerancji -- czyli *głos odbiorcy* -- nie powinny być nanoszone na karty kontrolne.

Trzy karty kontrolne Shewharta

Są to najczęściej stosowane karty kontrolne.

1. Karta XmR: Karta ta jest szczególnie użyteczna, gdy dane napływają rzadko (np. zbiorcze wyniki na szczeblach kierowniczych). Może być zastosowana do danych



liczbowych. Karta ta składa się z karty wartości X , czyli w naszym przypadku karty, na którą nanosi się kolejne, pojedyncze wyniki pomiarów interesującej nas wielkości, oraz z karty wartości *rozstępu ruchomego*. Mając zaobserwowane w kolejnych chwilach 1, 2, ..., n wyniki X_1, X_2, \dots, X_n , wartości te nanosimy na kartę X tak, jak to pokazuje dalej rysunek przykładowej karty z $n=25$. *Rozstęпами ruchomymi* nazywamy bezwzględne wartości różnic między dwoma kolejnymi wynikami: $|X_2 - X_1|, |X_3 - X_2|$ itd. (Inna sprawa, że karta rozstępu ruchomego jest niekiedy pomijana, ponieważ w dużym stopniu odzwierciedla ona to, co pokazuje karta X . Pojedyncza, nietypowa (duża lub mała) wartość na karcie X wpływa na dwie wartości rozstępu, dając dwa 'skoki' na karcie ruchomego rozstępu, odpowiadające 'skokowi' na karcie X .)

1.1. 3σ oblicza się na podstawie *rozstępów* między dwiema kolejnymi wartościami pojedynczymi. Tak obliczone wartości rozstępu są zawsze nieujemne.

1.2. W przypadku karty X :

$$3\sigma = 2.66 R\acute{s}r,$$

gdzie $R\acute{s}r$ jest średnią wartością rozstępów.

$$\text{G\o}r\text{n}a \text{ granica kontrolna (UCL)} = X\acute{s}r + 2.66 R\acute{s}r,$$

gdzie $X\acute{s}r$ jest średnią wartością zaobserwowanych wyników pomiarów.

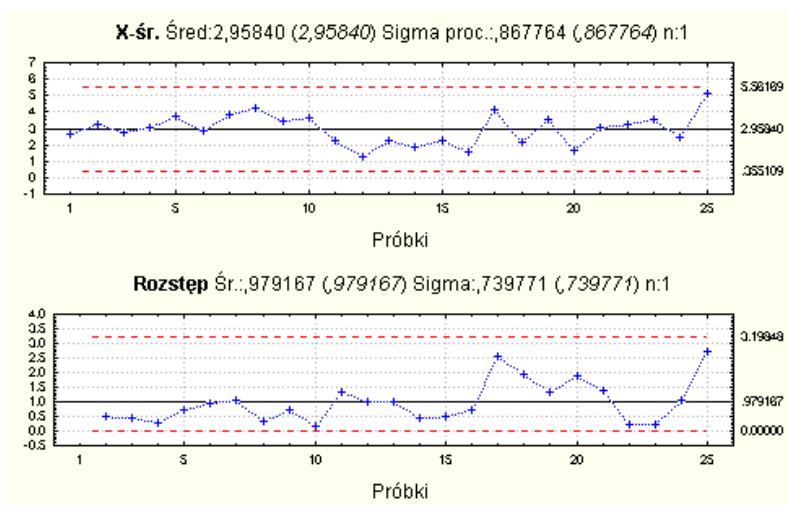
$$\text{Dolna granica kontrolna (LCL)} = X\acute{s}r - 2.66 R\acute{s}r.$$

1.3. W przypadku karty mR :

$$\text{G\o}r\text{n}a \text{ granica kontrolna (UCL)} = 3.27 R\acute{s}r.$$

Dolna granica kontrolna równa jest zawsze zeru.

1.4. 3σ musi być obliczane korzystając z wartości rozstępów, tak jak to wyżej opisano. **Nie należy** stosować kalkulatora lub komputera obliczającego 3σ na podstawie wszystkich danych zebranych w jeden zbiór.





2. **Karta X_{sr}-R:** Stosowana jest wtedy, gdy dane liczbowe mogą być pogrupowane w „racjonalne” podgrupy (próbki) o tej samej liczności (np. seryjna produkcja części). Na podgrupy składa się zwykle trzy do pięciu wartości. Granice kontrolne oblicza się na podstawie zmienności wewnątrz podgrup i dlatego podgrupy powinny być tak dobierane by - na ile to tylko możliwe -- w każdej z nich występowała tylko zmienność własna. Gdyby podgrupy były zbyt liczne, łatwiej mogłyby zawierać w swojej zmienności także zmienność wynikającą z istnienia przyczyn specjalnych.

2.1. Obliczamy średnią X_{sr} oraz rozstęp R każdej podgrupy; rozstęp jest równy różnicy między największą i najmniejszą wartością w podgrupie.

2.2. W przypadku karty R:

R_{sr} (linia centralna) = średnia rozstępów w podgrupach,

Górna granica kontrolna (UCL) = D₄ R_{sr},

Dolna granica kontrolna (LCL) = D₃ R_{sr},

gdzie D₃ i D₄ są znanymi współczynnikami liczbowymi o wartościach zależnych od liczności podgrup. W przypadku podgrup o liczności 6 lub mniej, D₃=0, skąd LCL=0. (Najczęściej potrzebne w praktyce współczynniki są podane w tabelce.)

2.3. W przypadku karty X_{sr}:

X_{sr}_{sr} (linia centralna) = średnia wartość średnich w podgrupach (czyli średnia ogólna),

Górna granica kontrolna (UCL) = X_{sr}_{sr} + A₂ R_{sr},

Dolna granica kontrolna (LCL) = X_{sr}_{sr} - A₂ R_{sr},

gdzie A₂ jest znanym współczynnikiem liczbowym o wartościach zależnych od liczności podgrup (patrz tabelka). Wartość wielkości A₂ R_{sr} jest oszacowaniem na podstawie danych wartości trzech odchyłeń standardowych procesu, czyli trzech odchyłeń standardowych zmienności w podgrupach, 3σ.

Tabela współczynników do konstrukcji kart kontrolnych:

| N | A ₂ | D ₃ | D ₄ |
|---|----------------|----------------|----------------|
| 2 | 1.88 | 0 | 3.27 |
| 3 | 1.02 | 0 | 2.57 |
| 4 | 0.73 | 0 | 2.28 |
| 5 | 0.58 | 0 | 2.11 |
| 6 | 0.48 | 0 | 2.00 |
| 7 | 0.42 | 0.08 | 1.92 |

(Podane wartości zależą od liczności podgrup n)

3. **Karta X_{sr}-S:** Jest to karta podobna do karty X_{sr}-R. Jedyna różnica w porównaniu z tą ostatnią polega na tym, że inaczej szacuje się odchylenia standardowe w podgrupach



i w konsekwencji inaczej też oblicza się wartość trzech odchyłeń standardowych procesu, 3σ . W przypadku karty \bar{X} -R szacowanie oparte jest na rozstępach w podgrupach, zaś w przypadku karty \bar{X} -S na próbkowych odchyleniach standardowych w podgrupach.

W przypadku karty kontrolnej dowolnego typu potrzeba około 25 wartości do naniesienia na kartę, by móc skonstruować wiarygodne granice kontrolne (oznacza to potrzebę uzyskania wyników pomiarów dla 25 podgrup w przypadku kart \bar{X} -R). Tym niemniej, jeżeli liczność danych jest mocno ograniczona (np. comiesięczne dane na poziomie zarządzania), można wówczas granice kontrolne obliczać na podstawie mniejszej liczby wartości. Około 15 wartości pozwala zwykle na skonstruowanie stosunkowo wiarygodnych granic. Nawet 10 lub nieco mniej wartości może pozwolić na rozpoczęcie pracy z kartami kontrolnymi. Ale 6 lub mniej wartości, to już strzelanie na oślep.

Wbrew tezie niektórych ‘teoretyków’, nie jest prawdą, że zdecydowanie się na granice 3-sigmowe było wyłącznie wynikiem zastosowania teorii prawdopodobieństwa, choć wybór ten rzeczywiście był zgodny z ową teorią. Karty Shewharta są oparte nie tylko na teorii, ale i na praktyce. Granice kontrolne mają ścisłą interpretację probabilistyczną, gdy nanoszone na karty wyniki pomiarów są od siebie niezależne i pochodzą z rozkładu normalnego. Ale już Shewhart zdawał sobie sprawę, że niezbyt drastyczne odstępstwa zarówno od założenia niezależności jak i od założenia normalności rozkładu nie mają wpływu na wiarygodność wnioskowania na podstawie jego kart kontrolnych. Trafność podanego wyboru granic kontrolnych ma swoje zasadnicze uzasadnienie nie w teorii prawdopodobieństwa a w praktycznym doświadczeniu pochodzącym z ich stosowania.

Powyższa uwaga nie ma sugerować, że nigdy nie jest celowe stosowanie kart innych typów, wymagających głębszej wiedzy, np. wykorzystujących informację, że dane mają pewien ustalony rozkład prawdopodobieństwa, różny od normalnego. Konieczne jest jednak podkreślenie faktu, że stosowalność omówionych kart kontrolnych wykracza bardzo daleko poza przypadek dysponowania danymi o rozkładzie normalnym.

W opracowaniu *Statystyka w kompleksowym zarządzaniu jakością* zwróciliśmy już uwagę, że nierozróżnianie zmienności własnej oraz wynikłej z istnienia przyczyn specjalnych prowadzi do jednego z następujących błędów:

◆ Błąd pierwszego rodzaju:

Reagowanie na przyczyny ogólne, jakby były to przyczyny specjalne (sygnały) – jest to podejmowanie działań bez potrzebnej wiedzy, ‘majsterkowanie’ przy procesie, które zwykle tylko pogarsza sytuację. Poszukiwanie przyczyn i podejmowanie działań naprawczych jest stratą czasu, jeśli nie występuje przyczyna specjalna.

◆ Błąd drugiego rodzaju:

Uznanie, że każda zmienność jest właściwa procesowi lub systemowi, czyli, że każda zmienność procesu lub systemu jest zmiennością własną, i ignorowanie przyczyn specjalnych (sygnałów), gdy te istnieją. Każdy taki przypadek to stracona okazja do poprawy. Takie straty mogą być bardzo kosztowne, tym bardziej, że przyczyny specjalne mają tendencję do powtarzającego się i coraz mocniejszego występowania.



Szczególnie często popełniany jest błąd pierwszy. Na przykład kierownictwo organizacji zarządza sprawdzenie tych z dwudziestu jej inwestycji budowlanych, których rzeczywisty budżet okazał się różnić od zaplanowanego o więcej niż 10%. W ogóle się przy tym nie interesuje jaka była naturalna zmienność owych różnic między budżetem zaplanowanym i rzeczywiście poniesionym. I jeżeli naturalna zmienność wynosiła np. $\pm 16\%$, to zalecone sprawdzenie nie ma żadnego sensu (przykład jest autentyczny). Rzecz w tym, że jeżeli w takich warunkach na przykład kierownik jednej inwestycji przekroczył zaplanowany budżet o więcej niż 10%, a mianowicie o 11%, to najprawdopodobniej ta konkretna inwestycja była tak samo typowa jak pozostałych dziewiętnaście i nie ma żadnego powodu, by ją akurat poddawać jakiejś specjalnej analizie. Inna sprawa, że naturalna zmienność rzędu 16% może być uznana za zbyt dużą. Działanie nad jej zmniejszeniem musi się wtedy zacząć od przyjrzenia się wszystkim inwestycjom, dokonania kategoryzacji pojawiających się problemów, by następnie przejść do przeanalizowania możliwości zmiany procesu inwestycyjnego (to jak istotne są różne problemy pomaga ocenić **analiza Pareta**). Uzasadniona może być też stratyfikacja procesu, np. rozróżnienie między inwestycjami ‘małymi’ i ‘dużymi’ (por. *Statystyka w kompleksowym zarządzaniu jakością*).

Przedstawiona na rysunku karta XmR pochodzi z książki B.L. Joinera, *Fourth Generation Management*, i dotyczy procentu niezrealizowanych na czas płatności w kolejnych 25 miesiącach. Gdyby nie granice kontrolne, procent niezrealizowanych płatności w miesiącu 25-tym mógłby z łatwością zostać potraktowany jako nietypowy i niepotrzebnie zaczęłoby się śledztwo co też szczególnie się w owym miesiącu zdarzyło.

Modyfikacje granic kontrolnych

- ◆ Zwykle początkowo ustala się *granice próbne*. Znajduje się wartości świadczące o nieuregulowaniu procesu (sygnały), wyznacza się i usuwa przyczyny specjalne oraz - - po usunięciu wartości sygnałów ze zbioru danych -- oblicza się powtórnie granice kontrolne.
- ◆ W sytuacji, gdy proces jest uregulowany (stabilny), granice kontrolne oraz linia centralna są przedłużane (tak by sięgnąć przyszłości procesu) i nowe punkty są nanoszone na kartę. Tak skonstruowane granice mogą pozostać niezmienione przez długi czas. Jeżeli proces zacznie dryfować lub podlegać innym zmianom, karta to zasygnalizuje; w odpowiedzi należy przywrócić proces do stanu uregulowania i ustalić na nowo granice kontrolne (jak to już opisano wyżej).
- ◆ Jeżeli proces poddany został istotnej zmianie, powinno się wyznaczyć nowe granice próbne. Zmiana ma z reguły na celu zmniejszenie zmienności własnej procesu, ale może też zmienić położenie linii centralnej i mogą pojawić się sygnały (proces po zmianie może i powinien mieć mniejszą zmienność własną, ale początkowo może okazać się nieuregulowanym).
- ◆ W procesie może zająć trwała zmiana, będąca skutkiem zadziałania przyczyny zewnętrznej, na którą nie mamy wpływu. Rozsądne jest wówczas obliczenie granic kontrolnych na nowo i następnie podjęcie pracy nad skompensowaniem owej niepożądananej zmiany.



Inne podstawowe karty kontrolne

Zaliczamy do nich odmiany kart już przedstawionych oraz karty przy ocenie alternatywnej. Spośród tych pierwszych wymienimy tu karty przy nierównych licznościach próbek (podgrup) oraz karty dla krótkich serii. Karty przy nierównych licznościach próbek są po prostu dostosowane do wymienionej sytuacji – gdy liczności kolejnych próbek, dla których oblicza się ich wartości średnie oraz odchylenia standardowe, są różne. Łatwo się zorientować, że karty \bar{X} -R oraz \bar{X} -S dają się znakomicie zastosować, gdy mamy do czynienia z produkcją wielkoseryjną. Co jednak czynić, gdy np. na tej samej obrabiarce produkuje się krótkie serie wyrobów podobnych, ale nieidentycznych (np. krótkie serie wałków o różnych średnicach), czyli gdy mamy do czynienia z krótkoseryjną produkcją wieloasortymentową. Granice kontrolne dla oryginalnych danych musiałyby wówczas być obliczane niezależnie dla różnych asortymentów, być może na podstawie zbyt niewielu danych. W podanej sytuacji należy zaproponować taką transformację danych oryginalnych, by dane przeskalowane były porównywalne, mimo że pochodzą z różnych asortymentów. Stosowna transformacja pozwala zbudować jedną kartę kontrolną dla wszystkich danych. Realizację takiego zadania ułatwia użycie kart dla krótkich serii.

Karty kontrolne przy ocenach alternatywnych dotyczą przypadku, gdy oryginalne dane są wynikiem dokonywania ocen alternatywnych ‘spełnia lub nie spełnia wymagań’ lub mierzenia liczby niezgodności (wad). Ocena alternatywna może np. mieć postać: płatność na czas lub nie, wysyłka na czas lub nie, średnica elementu w granicach tolerancji lub nie. W przypadku płatności i wysyłki ocenianą ‘partię’ stanowią wszystkie płatności i wysyłki z zadanego okresu, powiedzmy miesiąca. W przypadku oceniania średnicy elementu możemy badać liczbę elementów niezgodnych z wymaganiami w partiach o ustalonej liczności. Liczba niezgodności może np. dotyczyć liczby wad (jednego typu lub różnych typów) odlewu (partii odlewów) albo liczby reklamacji w zadanym przedziale czasu.

Karta Np (karta liczby jednostek niezgodnych) służy do badania liczby elementów nie spełniających wymagań. Na karcie wykreśla się liczbę jednostek (elementów) niezgodnych z wymaganiami w próbkach o stałej liczności. **Karta P** (karta frakcji jednostek niezgodnych) różni się od karty Np tylko tym, że zamiast liczby jednostek niezgodnych z wymaganiami wykreśla się na niej frakcję (procent) takich jednostek w próbce o zadanej liczności. W przypadku karty P liczności próbek mogą być różne. Jak wszystkie podstawowe karty kontrolne, obydwie karty buduje się podobnie jak karty omówione wcześniej, tyle że punktem wyjścia do obliczeń jest rozkład dwumianowy.

Gdy interesuje nas liczba niezgodności lub wad (na jednostkę, na partię, w zadanym przedziale czasu, na zadanej długości materiału itd.), posługujemy się **kartą C** (kartą liczby niezgodności). Mamy tu do czynienia z sytuacją jakościowo odmienną od tej, gdy stosuje się kartę Np lub P. Gdy interesuje nas liczba jednostek niezgodnych z wymaganiami w próbce o zadanej liczności, powiedzmy liczności n , wiemy, że jednostek niezgodnych nie może być więcej niż n . Gdy pytamy o liczbę niezgodności, nie umiemy podać górnego ograniczenia na wartość tej liczby. Probabilistyczną podstawę do konstrukcji karty C daje rozkład Poissona.



Karta C nie może być zastosowana, gdy licznosci próbek są różne. Stosujemy wówczas **kartę U** (kartę liczby niezgodności na jednostkę), na której wykreśla się stosunek liczby wad do licznosci próbki (zamiast o stosunku liczby wad do licznosci próbki, można by tu także mówić o stosunku liczby wad do długości badanego materiału, czasu badania itd.). Trzeba tu zaznaczyć, że granice kontrolne muszą tym razem być obliczane dla każdej próbki oddzielnie. W rezultacie granice te mają różne wartości dla różnych próbek.

Wybrane karty kontrolne do analizy problemów specjalnych

Nic nie przeszkadza, wręcz przeciwnie, warto zalecić by zastosowaniu dowolnej karty specjalistycznej towarzyszyło skonstruowanie także stosownej karty podstawowej. Różnice w otrzymanych obrazach mogą ułatwić wyciągnięcie najważniejszych wniosków. W przypadku trzech pierwszych kart, tzn. kart MA, EWMA i CUSUM, jawnie uwzględnia się, że obserwowane dane mogą nie być niezależne lecz być skorelowane, czyli że faktycznie mogą tworzyć szereg czasowy.

Karta średniej ruchomej (MA): Kartę tę warto stosować, gdy obserwowane średnie charakteryzują się trendem. Karta ta wygładza przebieg wykresu przez wykreślanie w kolejnych chwilach uśrednionej wartości kilku kolejnych średnich próbkowych (zamiast pojedynczej średniej, odpowiadającej próbce z danej chwili). Wygładzenie szybkiej zmienności losowej pozwala łatwiej zauważyć wolnozmienny trend obecny w danych. W obecności trendu, granica kontrolna na karcie MA zostaje często przekroczona pręcej niż na zwykłej karcie Shewharta. Nic nie stoi na przeszkodzie stosowaniu tych kart, gdy dane są pojedyncze, czyli gdy licznosc próbek (podgrup) wynosi jeden (średnia „próbki” jest wówczas po prostu równa zaobserwowanej w danej chwili wartości).

Karta wykładniczo ważonych średnich ruchomych (EWMA): Jest to karta o podobnym działaniu do karty MA. Zamiast średniej z kilku średnich bierze się tu pod uwagę wszystkie wcześniejsze średnie z wykładniczo malejącymi wagami. Kolejny, i -ty punkt wykresu obliczany jest ze wzoru:

$$z_i = \lambda X_{\text{sr}} + (1 - \lambda) z_{i-1}$$

gdzie parametr λ przyjmuje ustaloną wartość między 0 a 1. Karta ta bywa czulsza od karty MA, zwłaszcza, gdy zmiany średniej są małe oraz gdy dane są pojedyncze.

Karta sum skumulowanych (CUSUM): Mówiąc ogólnie, na karcie wykreśla się (skumulowaną do chwili bieżącej) sumę odchylek średnich próbkowych od wartości odniesienia, np. od wartości docelowej (nominalnej) analizowanego parametru lub od średniej ogólnej procesu. Jest to karta zaprojektowana tak, by wykryć trwałe przesunięcie średnich próbkowych. Karta ta wykrywa także trend, podobnie jak karta MA. Projektując kartę CUSUM, jej granice kontrolne ustala się tak, by uzyskać zadane prawdopodobieństwo fałszywego alarmu oraz zadane prawdopodobieństwo błędnej akceptacji przy zadanej wielkości wykrywalnego przesunięcia średniej. Karta jest czulsza na przesunięcia średniej niż inne karty, zwłaszcza gdy przesunięcie jest małe.

Karta X_{sr} dla danych o rozkładzie różnym od normalnego: Obliczenie wartości granic kontrolnych karty poprzedzone jest identyfikacją rozkładu (lub pewnych parametrów rozkładu), z jakiego pochodzą dane. Dla otrzymanego rozkładu oblicza się granice



kontrolne jako granice naturalnej zmienności własnej obserwowanych danych. Do otrzymanych wyników należy podchodzić z pewną ostrożnością, bowiem dokładne oszacowanie rozkładu danych – o ile zbiór danych nie jest bardzo liczny -- jest niemożliwe. Rezygnacja z oparcia się wyłącznie na karcie Shewharta jest uzasadniona wtedy tylko, gdy rozkład danych jest drastycznie różny od normalnego (jest wyraźnie skośny, wyostrzony lub spłaszczony). Zamiast konstruowania karty dla danych oryginalnych można także starać się dane poddać transformacji zmieniającej ich rozkład na normalny (lub bliski normalnemu).

Karta T^2 Hotellinga. Aż do tej chwili punktem zainteresowania był pojedynczy parametr procesu, który podlegał pomiarom (ich wyniki, lub średnie wyników w podgrupach, były nanoszone na kartę kontrolną). Nieraz badany proces powinien być charakteryzowany kilkoma (lub więcej) parametrami, które należy rozpatrywać łącznie. Innymi słowy, proces jest wówczas charakteryzowany wektorem parametrów. Klasyczną kartą kontrolną, która pozwala na zbadanie stabilności procesu opisywanego wektorem danych, jest karta T^2 Hotellinga. Karta ta może być stosowana wtedy tylko, gdy o wektorze danych można założyć, że jest normalny (karta pozostaje wiarygodna przy małych odstępstwach od normalności rozkładu tylko przy małym wymiarze wektora danych, powiedzmy 2 lub 3). Oczywiście szczególnie interesujący jest tu przypadek, gdy składowe wektora pomiarów są skorelowane.

Jeżeli pojedyncze parametry składające się na wektor danych są również interesujące, poza kartą Hotellinga, traktującą cały wektor łącznie, należy sporządzić także indywidualne karty \bar{X} -S lub \bar{X} -R dla tych parametrów. Rzecz w tym, że wektor pozostający w granicach stabilności procesu wielowymiarowego (czyli na karcie Hotellinga), może mieć składowe, które na kartach dla danych skalarnych są sygnałami. (Sygnałowi na karcie Hotellinga nie musi przy tym towarzyszyć sygnał na kartach dla składowych wektora pomiarów.)

Karty dla pomiarów wektorowych są nadal rozwijane w oparciu o metody statystycznej analizy wielowymiarowej. (Już 40 lat temu Jackson zauważył związek karty Hotellinga z **metodą składowych głównych**; w latach 80-tych wrócono do pracy nad nowymi kartami opartymi na metodzie składowych głównych, chcąc w ten sposób uzyskać wiarygodne karty kontrolne w przypadku, gdy wektory pomiarów mają wysoki wymiar.)

Analiza zdolności

Analiza zdolności procesu (lub maszyny) odpowiada na pytanie o to, na ile proces (maszyna) jest zdolny (jest zdolna) spełniać zadanie wyznaczone specyfikacjami (w dalszym ciągu mówić będziemy już tylko o analizie procesów). Procedury i terminologia analizy zdolności nie są jeszcze w pełni uzgodnione, ale z literatury i praktyki wynika już zasadniczo jednolity kształt działań na tym polu.

Analiza zdolności dzieli się na dwie części: analizę wstępną, dotyczącą procesu dopiero rozpoznawanego (nowego), oraz analizę właściwą, dotyczącą procesu pozostającego w stanie statystycznego uregulowania. Omówienie zaczynamy od analizy właściwej.



Aby przedstawić wskaźnik zdolności procesu, zwany też wskaźnikiem wydolności, zauważmy najpierw, że w przypadku losowania wielu liczb z rozkładu normalnego, 99,7% wylosowanych liczb leży w pasie $\pm 3\sigma$ wokół wartości średniej tego rozkładu. Przedział 6-sigmowy jest przedziałem zmienności własnej danych z rozkładu normalnego. Wskaźnik zdolności ma postać

$$C_p = (USL - LSL) / (6\sigma),$$

gdzie USL oznacza górną i LSL dolną granicę tolerancji, zaś σ jest odchyleniem standardowym zmienności własnej procesu (zwykle nieznanym i szacowanym tak jak się to czyni konstruując kartę \bar{X} -R lub \bar{X} -S). Wskaźnik ten mówi zatem jak się ma szerokość pasa tolerancji do szerokości przedziału zmienności własnej procesu. Wskaźnik zdolności mówi czy, i na ile, dany stabilny proces jest *potencjalnie* zdolny wykonywać wyspecyfikowane zadanie. Proces jest w oczywisty sposób ‘niezdolny’, jeśli $C_p < 1$ (dziś wymaga się zwykle, by wskaźnik C_p był równy przynajmniej 1,33). Jest to zdolność *potencjalna*, bowiem abstrahuje się tu od zagadnienia jak się ma ogólna średnia procesu do wartości nominalnej wielkości opisywanej przez proces. Jeżeli np. badanym procesem jest średnica toczonych wałków, nominalna wartość średnicy wynosi 30 mm, tolerancja $\pm 0,03$ mm, proces toczenia jest stabilny i $C_p = 1,67$, ale ogólna średnia procesu wynosi 30,05 mm, to proces jest wystarczająco *precyzyjny* i jest *potencjalnie* zdolny, ale jest *niedokładny* lub *niecelny*: nieomal zerowa jest szansa, że jakiś wałek znajdzie się w granicach tolerancji. Taki proces musi ulec wycentrowaniu: jego średnia musi być przesunięta do wartości nominalnej.

Podany wskaźnik dotyczy oczywiście sytuacji, gdy przedział tolerancji jest dwustronny. Łatwo podać odpowiedniki wskaźnika C_p , dostosowane do przypadku jednej tylko granicy tolerancji.

Jednocześnie o dokładności i precyzji procesu mówi wskaźnik wydajności procesu:

$$C_{pk} = C_p (1-k),$$

$$k = |\mu_0 - \mu| / [\min\{USL - \mu_0, \mu_0 - LSL\}],$$

gdzie μ_0 oznacza wartość docelową (nominalną) procesu, zaś μ średnią ogólną procesu. Współczynnik k jest miarą centralizacji procesu i jest równy zero, gdy wartość średnia jest równa wartości docelowej. Wskaźnik C_{pk} osiąga wartość największą, równą C_p , gdy $k=0$.

Z reguły, zadania poprawienia dokładności i precyzji procesu nie są zwykle jednakowo łatwe. Uzyskanie dobrej precyzji jest zazwyczaj trudniejsze i dlatego wprowadzono podane wyżej obydwa wskaźniki, C_p i C_{pk} (w omówieniu tym pomijamy kilka innych, podobnych wskaźników stosowanych w analizie zdolności).

W przeciwieństwie do kart kontrolnych Shewharta, wskaźniki zdolności mają ścisłą, podaną wyżej interpretację probabilistyczną. Przedział 6-sigmowy przestaje mieć sens, gdy rozkład analizowanych pomiarów jest inny niż normalny. W takim przypadku potrzebne jest określenie owego rozkładu i stosowne zmodyfikowanie wzorów na wskaźnik zdolności i wskaźnik wydajności procesu uregulowanego, tak by wielkość występująca



w mianowniku tych wzorów odpowiadała szerokości przedziału zmienności własnej procesu (w przedziale tym ma leżeć 99,7% danych).

Określenie rozkładu, z którego pochodzą wyniki pomiarów, jest jednym z zadań wstępnej analizy zdolności, mającej na celu możliwie wyczerpujące poznanie własności procesu. Są to badania o charakterze kompleksowym, mogące w zależności od uzyskiwanych wyników cząstkowych przebiegać na różne sposoby. Tu wymieniamy w telegraficznym skrócie tylko ich niektóre elementy. Badania przebiegają zgodnie z cyklem Deminga ‘zaplanuj-wykonaj-zbadaj-działaj’. Zaczynają się od wyboru do przyszłych pomiarów właściwych charakterystyk, wyboru aparatury pomiarowej i jej analizy ze względu na dokładność, powtarzalność i odtwarzalność. Po uporządkowanym zebraniu wyników pomiarów, dokonuje się ich wszechstronnej analizy. W tym, należy zbadać czy nie stwierdza się trendu lub przesunięć średniej (do czego można wykorzystać karty MA, EWMA, CUSUM). Jeżeli dane zbierane są w podgrupach i na podstawie kart nie można stwierdzić trendu i przesunięć średniej, należy zbadać zmienność w podgrupach i między grupami. Użycie karty kontrolnej Shewharta powinno pomóc w wykryciu zmienności wynikających z przyczyn specjalnych (zwłaszcza innych niż przesunięcia średniej lub trend). Gdy proces jest ustabilizowany, określony powinien zostać rozkład, z którego pochodzą dane. **Histogram** może wskazać na wyraźne odstępstwo od rozkładu normalnego (zawsze powinno się konstruować kilka histogramów z różnymi liczbami przedziałów i dopiero na tej podstawie formułować wnioski dotyczące spodziewanego typu rozkładu). Testowanie normalności rozkładu najlepiej jest oprzeć na testach skośności i kurtozy (wyostrzenia) oraz na **teście Shapiry-Wilka**. Bardzo skutecznym środkiem graficznego sprawdzenia czy rozkład jest normalny jest **wykres kwantyl-kwantyl oraz wykres prawdopodobieństwo-prawdopodobieństwo**. Często wykresy te pozwalają także stwierdzić typ ewentualnego odstępstwa od rozkładu normalnego. Znany ze swej dużej mocy test Shapiry-Wilka ujmuje za pomocą jednej liczby to co w sposób graficzny – i dzięki temu bogatszy -- pokazuje wykres kwantyl-kwantyl.

Jeżeli hipoteza o normalności rozkładu zostaje odrzucona, należy dopasować do danych inny rozkład i oszacować jego parametry. Odpowiadający otrzymanemu rozkładowi wykres kwantyl-kwantyl lub prawdopodobieństwo-prawdopodobieństwo jest znowu doskonałym sposobem sprawdzenia, czy dopasowanie jest trafne.

Dopasowywanie rozkładu do danych wymaga doświadczenia, zwłaszcza gdy zbiór danych nie jest bardzo liczny. W zasadzie powinno się unikać dopasowywania, gdy liczebność zbioru danych jest mniejsza niż 100.

W zestawie przykładów pakietu *STATISTICA* podana jest 100-elementowa próbka fikcyjnych danych, mających być średnicami pierścieni tłokowych o nominalnej wartości 74 mm i granicach specyfikacji $\pm 0,05$ mm. Próbkę jest stabilna i podany wykres kwantyl-kwantyl potwierdza hipotezę normalności rozkładu. Proces jest dokładny, precyzyjny i dobrze wycentrowany: $C_p=1,649$, zaś $C_{pk}=1,648$. Ilustrują to poniższe wykresy:

