



METODY STATYSTYCZNE W ZARZĄDZANIU JAKOŚCIĄ

*prof. zw. dr hab. Andrzej Iwasiewicz, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie,
Katedra Statystyki*

Wstęp

We wszystkich fazach zarządzania jakością mamy do czynienia ze zjawiskami, które są tylko częściowo zdeterminowane przez warunki początkowe, albo zadane parametry. Badanie takiego zjawiska musi więc być rozważane jako doświadczenie losowe, a jego wynik musi być traktowany jako zdarzenie losowe. Do ilościowego opisu takich zjawisk wykorzystuje się zmienne losowe. W konsekwencji, we wszystkich fazach zarządzania jakością muszą być stosowane statystyczne metody analizy i interpretacji wyników pomiarów i obserwacji. Nie zaproponowano bowiem - jak dotychczas - innych, równie efektywnych metod.

Wśród metod statystycznych stosowanych w zarządzaniu jakością można wyróżnić dwie grupy. Do pierwszej należą ogólne metody opisu i analizy danych, które z równym powodzeniem wykorzystywane są w innych dziedzinach. Drugą grupę stanowią natomiast metody opracowane z myślą o zarządzaniu jakością. Owe wyspecjalizowane metody stosowane są przede wszystkim w fazie operacyjnego sterowania procesami kreowania jakości wykonania. Należy tu wymienić karty kontrolne, a zwłaszcza karty kontrolne Shewharta, które są najwcześniejszymi historycznie narzędziami statystycznego sterowania procesami na użytek zarządzania jakością. Uruchomienie procesu produkcji wyrobu, albo procesu świadczenia usługi, powinno być poprzedzone analizą wydolności (zdolności) każdego takiego procesu. Jest to analiza statystyczna, realizowana za pomocą wyspecjalizowanych narzędzi formalnych, a jej wyniki formułowane są w sposób charakterystyczny dla wnioskowania statystycznego. Wykorzystanie metod statystycznych do analizy wydolności procesu, a następnie - jeśli wynik owej analizy jest pozytywny - do sterowania tym procesem, wymaga operowania odpowiednio zdefiniowanymi miarami poziomu jakości produktu i procesu. Chodzi o takie miary, które mogą być interpretowane jako parametry rozkładów zmiennych losowych, które są zmiennymi diagnostycznymi w procesie zarządzania jakością.

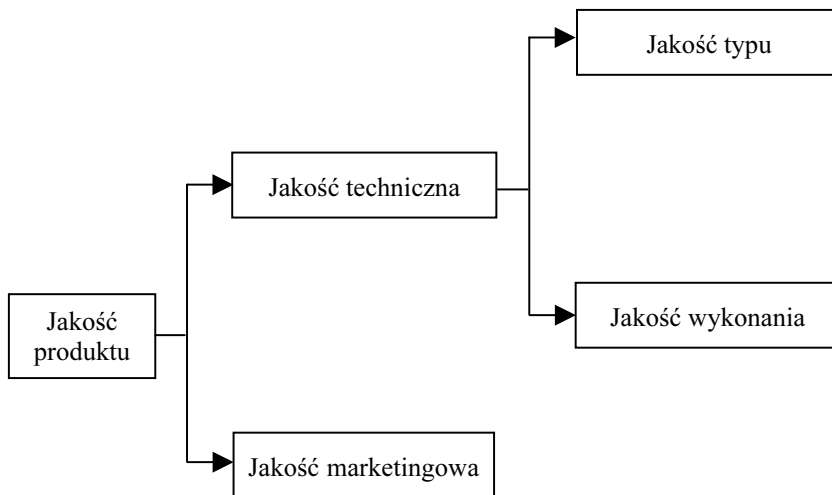
Tak więc, mówiąc o metodach statystycznych w zarządzaniu jakością należy mieć na uwadze przede wszystkim trzy wymienione powyżej grupy problemów, a mianowicie

- ◆ miary poziomu jakości,
- ◆ analizę wydolności (zdolności) procesu, a także
- ◆ procedury statystycznego sterowania procesami.

Omawianie tych problemów poprzedzimy kilkoma uwagami na temat jakości produktu. Jest to wszak centralne pojęcie w systemie poruszanych tu zagadnień, leżące u podstaw wszelkich działań w zakresie zarządzania jakością. Zauważmy przede wszystkim, że przy definiowaniu jakości dla potrzeb zarządzania należy rozróżnić

- ♦ produkty wytwarzane masowo, dla anonimowego odbiorcy i przeznaczone do sprzedaży na rynku, oraz
- ♦ produkty wytwarzane na zamówienie konkretnego odbiorcy.

W pierwszym z wyróżnionych przypadków jakość ma charakter dualny. W takiej sytuacji - jak to pokazano schematycznie na rys.1 - należy rozróżnić techniczną jakość produktu i jakość marketingową. Jeśli natomiast produkt adresowany jest do konkretnego odbiorcy, to ów dualizm pojęcia jakości traci sens. Nie ma wówczas ani potrzeby, ani możliwości, definiowania marketingowej jakości produktu. W takiej sytuacji wszystkie problemy marketingowe przesunięte są z poziomu produktu na poziom producenta. Na podstawie kryteriów rynkowych odbiorca wybiera producenta (dostawcę), a w dalszym postępowaniu funkcjonuje już tylko jakość produktu jako kategoria techniczna.



Rys. 1. Dualny charakter jakości produktu

Jakość techniczna ma dwie składowe, a mianowicie jakość typu i jakość wykonania. Jakość typu kreowana jest w procesie projektowania. Metody statystyczne mają tu ograniczone zastosowanie i dotyczą przede wszystkim projektowania doświadczeń (eksperymentów) podejmowanych w celu empirycznej weryfikacji proponowanych rozwiązań konstrukcyjnych i materiałowych. Jakość wykonania kreowana jest w procesie realizacji, a więc w procesie produkcji wyrobu, albo w procesie świadczenia usługi. Na użytek sterowania tymi procesami opracowano wiele metod funkcjonujących w cyklu Shewharta. Podstawowe spośród tych metod zaliczane są do tak zwanej wielkiej siódemki (ang. magnificent seven).

Miary poziomu jakości wykonania

Przypomnijmy, że jakość wykonania określana jest również jako jakość zgodności. Jest to relacja między zbiorem technicznych i użytkowych właściwości produktu przewidzianym w projekcie lub zrealizowanym w prototypie, a tym zbiorem właściwości, który jest realizowany w procesie produkcji lub świadczenia usługi.

Zarówno w praktyce jak i w rozważaniach teoretycznych podstawowe znaczenie mają dwie miary poziomu jakości wykonania, a mianowicie:



- ♦ wadliwość (a także sprzężona z nią poprawność), oraz
- ♦ przeciętna liczba wad w jednostce produktu.

Wadliwość może być miarą poziomu jakości wykonania tylko wówczas, gdy istnieje możliwość i potrzeba dychotomicznej klasyfikacji jednostek produktu, z wyróżnieniem jednostek wykonanych poprawnie, czyli spełniających stawiane im wymagania jakościowe, oraz jednostek, które owych wymagań nie spełniają. Jeśli natomiast nie ma możliwości przeprowadzenia takiej klasyfikacji, to jako miarę poziomu jakości wykonania przyjmuje się zwykle przeciętną liczbę wad (albo niezgodności) w jednostce produktu.

Każda z tych miar może być miarą cząstkową, albo agregatową. Z miarą cząstkową mamy do czynienia wówczas, gdy jakość wykonania oceniana jest ze względu na pojedynczą cechę diagnostyczną (albo użytkową), traktowaną w izolacji od pozostałych cech produktu. Jeśli natomiast jakość wyrobu, albo usługi oceniana jest ze względu na pewien zbiór (agregat) cech traktowanych łącznie, to mamy do czynienia z miarą agregatową.

Wadliwość

Jeśli chcemy wykorzystać zmienną diagnostyczną X w procesie oceny wadliwości produktu, to musimy zdefiniować zbiór wartości (X^0) odpowiadający tej zmiennej, a następnie rozciąć ten zbiór na dwa podzbiory, a mianowicie na

- ♦ podzbiór wartości pożądaných X^+ oraz
- ♦ podzbiór wartości niepożądaných X^- .

Rozcięcie zbioru X^0 musi być przeprowadzone w taki sposób, by

$$X^+ \cup X^- = X^0 \quad (1)$$

i by jednocześnie

$$X^+ \cap X^- = \emptyset \quad (2)$$

Wadliwość (p) może być definiowana dwojako, a mianowicie jako frakcja lub jako prawdopodobieństwo. W przypadku wadliwości cząstkowej, czyli wadliwości ze względu na pojedynczą zmienną diagnostyczną (X), mamy

$$p(X) = \Pr(x \in X^-) \quad (3)$$

$$p(X) = n(x \in X^-)/n \quad (4)$$

gdzie n jest licznością badanego zbioru, natomiast $n(x \in X^-)$ oznacza liczność zbioru jednostek wadliwych.

Obydwie definicje, chociaż formalnie różne, są równoważne numerycznie. Niezależnie od tego, z której definicji korzystamy, wadliwość wyraża się liczbą z przedziału $[0;1]$. Jest to miara z inwersją. Jakość wyrobu jest najwyższa, gdy wadliwość = 0. Jeśli natomiast wadliwość = 1, to jakość produktu jest najniższa.

Norma terminologiczna PN-ISO 3534-2 (1994) „Statystyka. Statystyczne sterowanie jakością Terminologia i symbole.” wprowadza rozróżnienie między wadą i niezgodnością. Norma ta wymienia cztery charakterystyki jakości, oparte na koncepcji wadliwości. Są to mianowicie:

- ♦ frakcja jednostek niezgodnych (ang. proportion of nonconforming items),
- ♦ procent jednostek niezgodnych (ang. percentage of nonconforming items).



- ♦ frakcji jednostek wadliwych (ang. proportion of defectives items), a także
- ♦ procentu jednostek wadliwych (ang. percentage of defectives items).

Zalecane zmiany w aparacie pojęciowym, a także wprowadzone w konsekwencji zmiany terminologiczne, należy ocenić jako co najmniej niefortunne. Pojęcie wadliwości ma tę przewagę nad propozycjami zawartymi w PN-ISO 3534-2, że można ją interpretować - bez szkody dla ścisłości rozumowania - zarówno jako prawdopodobieństwo, jak i jako frakcję. W odniesieniu do partii (zasobu) już wytworzonego produktu bardziej czytelna jest interpretacja wadliwości jako frakcji. W odniesieniu do procesu wygodniejsze jest traktowanie wadliwości jako prawdopodobieństwa. Takich zróżnicowanych możliwości interpretacyjnych nie dają miary proponowane przez PN-ISO 3534-2. Nie bez znaczenia jest także fakt, że pojęcie wadliwości jest zakorzenione w polskiej literaturze przedmiotu. Pojęcie to funkcjonowało już w pierwszych polskich podręcznikach statystycznych metod sterowania jakością, wydanych w połowie lat pięćdziesiątych kończącego się stulecia.²

Zarówno w teorii jak i w praktyce zarządzania jakością wyróżnia się dwie klasy zmiennych diagnostycznych, a mianowicie zmienne ciągłe, których realizacje uzyskuje się w rezultacie pomiarów na mocnych skalach (przedziałowych i ilorazowych), oraz zmienną zero-jedynkową, o realizacjach uzyskiwanych w rezultacie pomiaru na najprostszej, dwuwartościowej skali porządkowej. W polskiej terminologii normalizacyjnej te dwa przypadki określa się jako:

- ♦ liczbową ocenę właściwości produktu, oraz jako
- ♦ alternatywną ocenę właściwości produktu.³

W przypadku zero-jedynkowych zmiennych diagnostycznych funkcja pomiarowa przyporządkowująca wartości liczbowe zaobserwowanym stanom jednostki produktu zdefiniowana jest następująco:

$$x = \begin{cases} 0 & \text{gdy jednostka produktu spełnia wymagania jakościowe} \\ 1 & \text{gdy jednostka produktu nie spełnia wymagań jakościowych} \end{cases} \quad (5)$$

Tak więc, zdefiniowane powyżej zbiory \mathbf{X}^0 , \mathbf{X}^+ oraz \mathbf{X}^- przedstawiają się tu następująco:

$$\mathbf{X}^0 = \{0;1\}, \mathbf{X}^+ = \{0\}, \mathbf{X}^- = \{1\}.$$

W konsekwencji

$$p(X) = \Pr(x = 1) \quad (6)$$

$$p(X) = n(x = 1)/n \quad (7)$$

Jeśli X jest zmienną ciągłą, to wówczas wyróżnione powyżej zbiory są przedziałami na osi liczbowej tej zmiennej. Podzbiór wartości pożądaných \mathbf{X}^+ przyjmuje postać tak zwanego przedziału tolerancji (ang. tolerance interval, tolerance range). W przedziale tolerancji wyróżnia się (na podstawie przesłanek merytorycznych) wartość najbardziej pożądaną $x_0 \in \mathbf{X}^+$ nazywaną też

² J. Oderfeld Zarys statystycznej kontroli jakości, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1954;
J. Obalski, Statystyczna kontrola jakości podczas produkcji, Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1955.

³ Takie określenia zalecane są w cytowanej już normie terminologicznej PN-ISO 3534-2. W angielskojęzycznej literaturze przedmiotu rozróżnia się badanie ze względu na zmienne (variables) i cechy (attributes). W świetle teorii pomiaru jest to podział archaiczny i nieścisły. Nie zmienia to jednak faktu, że jest on powszechnie stosowany również w angielskojęzycznych edycjach norm międzynarodowych.



wartością docelową (ang. target value), albo wartością nominalną (ang. nominal value). Końce przedziału X^+ nazywane są często granicami tolerancji. Lewy koniec przedziału tolerancji nazywany jest dolną granicą tolerancji (ang. lower specifications limit; LSL). Górną granicą tolerancji (ang. upper specifications limit; USL) jest prawy koniec przedziału X^+ .

Wśród ciągłych zmiennych diagnostycznych wykorzystywanych w procesie sterowania jakością wyróżnia się trzy grupy, a mianowicie: stymulanty, destymulanty i nominanty. Ze stymulantą jakością (ang. larger the better) mamy do czynienia wówczas, gdy poziom jakości produktu jest tym wyższy, im większe wartości przyjmuje dana zmienna. W przypadku destymulant jakości (ang. smaller the better) mamy sytuację odwrotną. Im większe wartości przyjmuje odpowiednia zmienna, tym niższa jest jakość produktu. W nowoczesnym zarządzaniu jakością najczęstszym typem zmiennej jest nominanta (ang. nominal the best). Maksimum jakości odpowiada tu pewnej określonej wartości (x_0) zmiennej X , a wszelkie odchylenia od tej wartości - zarówno in plus, jak i in minus - obniżają jakość produktu.

Jeśli obserwowana zmienna diagnostyczna X jest nominantą, to przedział tolerancji jest ograniczony obustronnie

$$X^+ = [x_d; x_g] \quad (8)$$

i w konsekwencji

$$p(X) = \Pr(x < x_d) + \Pr(x > x_g) \quad (9)$$

$$p(X) = n(x < x_d)/n + n(x > x_g)/n \quad (10)$$

Z ograniczeniami jednostronnymi mamy do czynienia w przypadku zmiennych diagnostycznych o charakterze stymulant i destymulant. Jeśli mamy do czynienia ze stymulantą, to przedział tolerancji ograniczony jest tylko lewostronnie (od dołu), albowiem tylko zbyt małe wartości x świadczą o niskiej jakości produktu. Mamy więc

$$X^+ = [x_d; b) \quad (11)$$

i w konsekwencji

$$p(X) = \Pr(x < x_d) \quad (12)$$

$$p(X) = n(x < x_d)/n \quad (13)$$

Jeśli natomiast obserwowana zmienna diagnostyczna X jest destymulantą jakości, to tylko zbyt wysokie wartości x przemawiają na niekorzyść jakości produktu. Przedział tolerancji musi więc być ograniczony prawostronnie

$$X^+ = (a; x_g] \quad (14)$$

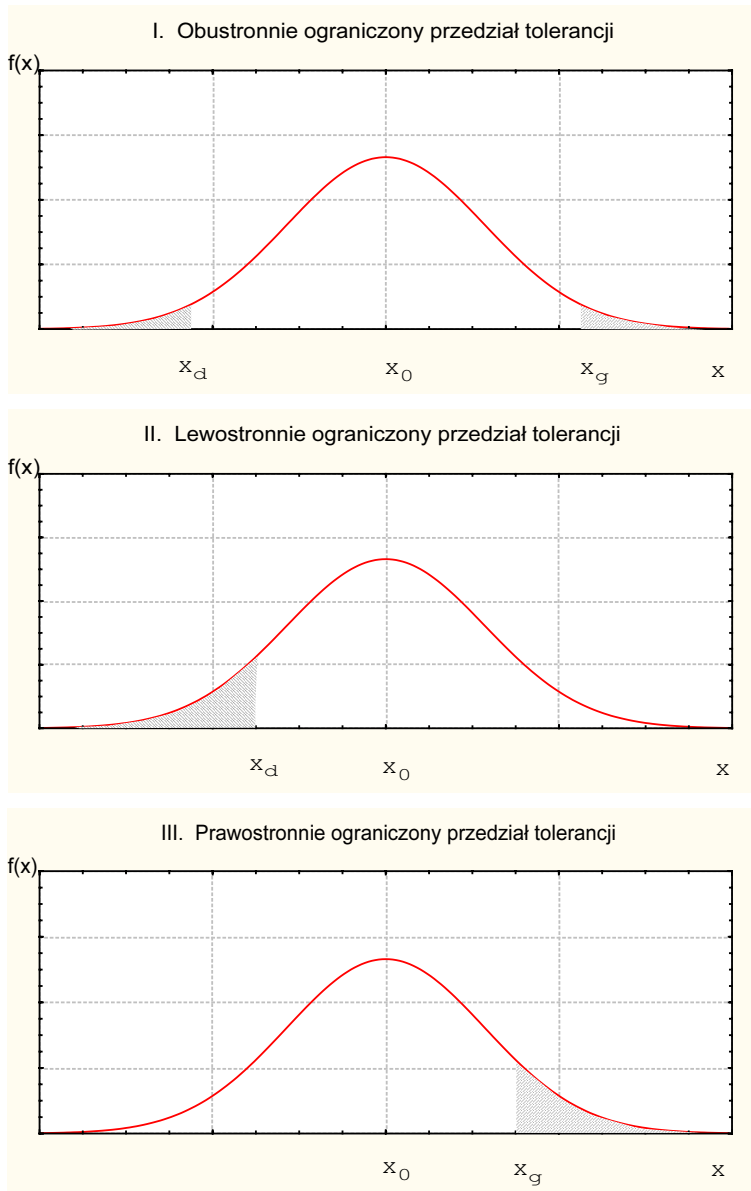
a wadliwość cząstkową definiujemy następująco

$$p(X) = \Pr(X > x_g) \quad (15)$$

$$p(X) = n(x > x_g)/n \quad (16)$$

Wartości a i b we wzorach (11) i (14) nie są ograniczeniami w sensie wymagań jakościowych. Są one uwarunkowane formalnymi własnościami przyjętej skali pomiarowej, albo nawet technicznymi własnościami zastosowanego instrumentarium pomiarowego. Jeśli - na przykład - badaniu podlega procentowe stężenie jakiegoś składnika w produkcie, to $a = 0\%$, $b = 100\%$. Omawiane problemy ilustruje rys.2. W części I tego rysunku przedstawiono schematycznie sytuację odpowiadającą wzorom (8) - (10). Wzory (11) - (13) opisują sytuację pokazaną w części II rysunku, natomiast

wzory (14) - (16) dotyczą części III. Przy sporządzaniu tego rysunku założono, że zmienna diagnostyczna X ma normalny rozkład prawdopodobieństwa.



Rys. 2. Wadliwość produktu w przypadku ciągłych zmiennych diagnostycznych

Założmy obecnie, że wadliwość produktu jest oceniana nie ze względu na pojedynczą zmienną diagnostyczną X , lecz ze względu na pewien zbiór (agregat) tych zmiennych, traktowanych łącznie. Może to być w szczególności:

- ◆ $X^{(2)}$ - zbiór zmiennych diagnostycznych opisujących istotne cechy produktu, albo
- ◆ $X^{(3)}$ - zbiór zmiennych diagnostycznych opisujących mało istotne cechy produktu.



Odmienne potraktowanie wymaga

♦ $\mathbf{X}^{(1)}$ - zbiór zmiennych diagnostycznych opisujących krytyczne cechy produktu.

Przy ocenie jakości produktu ze względu na zmienne należące do tego zbioru każdą cząstkową wadliwość należy rozważać osobno.

Metodyka wyznaczania agregatywnej wadliwości produktu nie zależy od tego, z którym spośród wyróżnionych powyżej dwóch zbiorów zmiennych diagnostycznych ($\mathbf{X}^{(2)}$, $\mathbf{X}^{(3)}$) mamy do czynienia. Dlatego też, za podstawę dalszych rozważań przyjmiemy hipotetyczny zbiór zmiennych diagnostycznych postaci

$$\mathbf{X} = \{X_j : j = 1, 2, \dots, k\} \quad (17)$$

Każdej zmiennej $X_j \in \mathbf{X}$ odpowiada pewien zbiór wartości pożądaných \mathbf{X}_j^+ , oraz podzbiór wartości niepożądanych \mathbf{X}_j^- . Zbiory pożądaných wartości tworzą rodzinę zbiorów

$$\mathbf{X}^+ = \{\mathbf{X}_j^+ : j = 1, 2, \dots, k\} \quad (18)$$

Agregatową wadliwość produktu można zdefiniować następująco:

$$p(\mathbf{X}) = 1 - \prod_{j=1}^k \Pr(x_j \in \mathbf{X}_j^+) \quad (19)$$

Z definicji tej wynikają bezpośrednio bardzo niekorzystne własności operacyjne wadliwości agregatywnej. W celu wyjaśnienia tych problemów przyjmijmy, że wszystkie wadliwości cząstkowe $p(X_j)$ mają tę samą wartość $p(X)$. Przy takim upraszczającym założeniu wzór (19) przyjmuje postać

$$p(\mathbf{X}) = 1 - [1 - p(X)]^k \quad (20)$$

W konsekwencji mamy

$$p(X) = 1 - \sqrt[k]{1 - p(\mathbf{X})} \quad (21)$$

Wzór ten pozwala wyznaczyć poziom wadliwości cząstkowych $p(X)$ niezbędnych dla utrzymania wadliwości ogólnej na poziomie $p(\mathbf{X})$, jeśli jakość oceniana jest ze względu na k zmiennych diagnostycznych.

Przykład 1

W tabelicy 1 przedstawiono wartości funkcji (21) dla pięciu poziomów wadliwości ogólnej $p(\mathbf{X})$ i pięciu licznosci ($k = 2, \dots, 6$) zbioru zmiennych diagnostycznych \mathbf{X} . Wadliwości - zarówno agregatywne, jak i cząstkowe - wyrażono w procentach. Ustalmy uwagę na wierszu odpowiadającym $p(\mathbf{X}) = 5\%$. Jeśli zbiór zmiennych diagnostycznych jest dwuelementowy ($k = 2$), to utrzymanie ogólnej wadliwości na założonym poziomie 5% wymaga, by obydwie wadliwości cząstkowe [$p(X_1)$, $p(X_2)$] miały wartości nie przekraczające $p(X) = 2,532\%$. Zauważmy jednak, że jeśli liczba badanych zmiennych diagnostycznych wzrośnie do $k = 6$, to założoną wadliwość agregatową 5% osiąga się dopiero wówczas, gdy wadliwości cząstkowe [$p(X)_j$; $j = 1, 2, \dots, 6$] będą utrzymywane na poziomie nie przekraczającym $p(X) = 0,851\%$. Jeśli wymagania techniczne w stosunku do wyrobu są ustalone, to tak znaczna obniżka wadliwości wymaga zwykle bardzo dużych nakładów w sferze sterowania jakością zwłaszcza w zakresie prewencji. Należy przy tym pamiętać, że nakłady te rosną szczególnie szybko w miarę przybliżania się wadliwości do zera.

Tablica 1. Wadliwość cząstkowa $p(X)$ jako funkcja wadliwości ogólnej $p(X)$ i liczności (k) zbioru zmiennych diagnostycznych X

p(X) [%]	k				
	2	3	4	5	6
	p(X) [%]				
1	0,501	0,334	0,251	0,201	0,167
5	2,532	1,695	1,274	1,021	0,851
10	5,132	3,451	2,600	2,085	1,741
15	7,805	5,273	3,982	3,198	2,672
20	10,557	7,168	5,426	4,365	3,651

Źródło: obliczenia własne

Przeciętna liczba wad w jednostce produktu

Wadliwość jest podstawową, ale nie jedyną miarą jakości wykonania. Drugą, ważną i często stosowaną miarą jest przeciętna liczba wad w jednostce produktu. Istnieje obszerna klasa produktów (wyrobów i usług), w przypadku których alternatywna ocena stanu jednostki produktu jest praktycznie niemożliwa, albo przynajmniej niecelowa. Do grupy tej należy zaliczyć takie wyroby jak - na przykład - tkaniny, papier, przewody energetyczne i telekomunikacyjne, folie z tworzyw sztucznych i inne podobne wyroby. Wspólną cechą tych wyrobów jest to, że są one wytwarzane w postaci bardzo długich odcinków (nawet kilkukilometrowych), a długość takiego odcinka decyduje często o przydatności wyrobu do dalszego przetwórstwa. Im dłuższy jest bowiem taki odcinek, tym mniejsze są straty w procesie jego przeróbki (konfekcjonowania). Zauważmy, że jeśli nawet prawdopodobieństwo wystąpienia błędu technologicznego jest bardzo małe, to im dłuższy jest wytwarzany odcinek, tym mniejsze są szanse, że otrzymamy produkt całkowicie wolny od wad. Jeśli więc żądany bardzo długich odcinków, to należy pogodzić się z występowaniem wad. Zastosowanie przeciętnej liczby wad jako miary jakości wykonania nie ogranicza się do wymienionych powyżej wyrobów. Podobne problemy pojawiają się przy ocenie jakości wykonania różnego rodzaju urządzeń technicznych, mebli, odzieży, obuwia i innych produktów, a także usług. We wszystkich tych przypadkach dwupunktowa skala ocen (wolny od wad, wadliwy albo zgodny, niezgodny) jest niewystarczająca. Podstawę oceny jakości wykonania stanowi tu liczba wad w jednostce produktu, a odpowiednią miarą jest przeciętna liczba wad w owej jednostce. Może to być jednostka elementarna albo jednostka agregatowa, czyli pewien zbiór jednostek elementarnych, o ustalonej liczności m .

W odniesieniu do omawianych tu miar jakości wykonania, podobnie jak w odniesieniu do miar opartych na alternatywnej klasyfikacji jednostek produktu, norma terminologiczna PN-ISO 3534-2 zaleca rozróżnianie wad i niezgodności. W konsekwencji, w normie tej proponowane są następujące charakterystyki jakości:

- ◆ liczba niezgodności na jednostkę (ang. nonconformities per item),
- ◆ liczba wad na jednostkę (ang. defects per item),
- ◆ liczba niezgodności na sto jednostek (ang. nonconformities per hundred items).

Wykorzystanie tych charakterystyk do pomiaru poziomu jakości wykonania wymaga oczywiście operowania przeciętną liczbą wad albo przeciętną liczbą niezgodności na jednostkę produktu.



Przeciętna liczba wad w jednostce produktu, ze względu na pojedynczą zmienną diagnostyczną X oznaczana jest często symbolem λ_m . Indeks m jest tu identyfikatorem wielkości agregatowej jednostki produktu, do której odnoszona jest liczba wad. Tak więc - na przykład - λ_{100} oznacza przeciętną liczbę wad w jednostce agregatowej złożonej z $m = 100$ jednostek elementarnych. Jeśli wartość m jest ustalona, to jakość wykonania jest tym wyższa, im mniejsza jest wartość λ_m . Podstawową, aczkolwiek nie zawsze wygodną w zastosowaniach, miarą jakości wykonania jest λ_1 , czyli przeciętna liczba wad w elementarnej jednostce produktu. Mając tę wartość można wyznaczyć λ_m dla przyjętej liczności jednostki agregatowej. Mamy mianowicie

$$\lambda_m = \lambda_1 m \quad (22)$$

Agregatowa jednostka produktu, do której odnoszona jest przeciętna liczba wad, może być definiowana różnie, stosownie do rodzaju produktu i celu badania. Istnieje tu znaczny margines dowolności, szczególnie wyraźny w badaniach wykonywanych dla potrzeb sterowania jakością w toku produkcji.

W odbiorczych badaniach jakości nie ma tak dużej dowolności określania agregatowej jednostki produktu, jak w bieżącej kontroli jakości. Wynika to z konieczności zapewnienia porównywalności ocen jakości w kontaktach między dostawcami i odbiorcami towarów. W badaniach odbiorczych przyjmuje się zwykle, że miarą jakości wykonania jest przeciętna liczba wad w stu elementarnych jednostkach produktu λ_{100} (ang. defects per hundred units). Konwencję polegającą na odnoszeniu liczby wad do stu jednostek produktu przyjęto w amerykańskiej normie MIL-STD 105D (1963) „Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes”. Pozwoliło to na skonstruowanie procedur kontrolnych, które mogą być stosowane zarówno wówczas, gdy miarą jakości wykonania jest wadliwość (wyrażona w procentach), jak i wtedy gdy jakość wykonania mierzona jest liczbą wad w stu jednostkach produktu. Zauważmy jednak, że λ_{100} nie jest unormowaną miarą jakości, tak jak procentowa wadliwość p [%]. Zbiór wartości jakie może przyjmować λ_{100} jest ograniczony tylko od dołu, przez zero. Zbiór ten nie jest natomiast ograniczony od góry. Nie można wszak wskazać największej wartości jaką może przyjąć λ_{100} . Ma to ten skutek, że wartości λ_{100} nie mogą być interpretowane jako procenty.

Cząstkowe miary jakości wykonania są użyteczne przede wszystkim podczas sterowania procesami kreowania użytkowych i technicznych właściwości produktu. Dotyczy to zarówno procesu projektowania, jak i przede wszystkim - procesu produkcji. Miary te są natomiast mało użyteczne wówczas, gdy zachodzi potrzeba formułowania uogólnionych ocen jakości produktu, na przykład dla celów marketingowych. Z myślą o takich właśnie ocenach definiowane są uogólnione miary jakości wykonania. W rozważanym przypadku jest to przede wszystkim:

- ♦ $\lambda_m^{(3)}$ - ogólna, przeciętna liczba wad mało istotnych w agregatowej jednostce produktu o liczności m , a także
- ♦ $\lambda_m^{(2)}$ - ogólna, przeciętna liczba wad istotnych w agregatowej jednostce produktu o liczności m ,

Nie należy natomiast wyznaczać $\lambda_m^{(1)}$, czyli ogólnej przeciętnej liczby wad krytycznych w agregatowej jednostce produktu o liczności m . Wady ze względu na każdą cechę krytyczną powinny być analizowane z osobna. Uogólnione miary jakości wykonania ze względu na cechy istotne ($\lambda_m^{(2)}$) i cechy mało istotne ($\lambda_m^{(3)}$) mogą podlegać dalszej integracji. Można do tego wykorzystać - na przykład - funkcję postaci

$$\left. \begin{matrix} \lambda_m^{(23)} \\ \lambda_m^{(32)} \end{matrix} \right\} = h_2 \lambda_m^{(2)} + h_3 \lambda_m^{(3)} \quad (23)$$



gdzie h_2 i h_3 są wagami przypisywanymi cechom istotnym i mało istotnym w procesie ich integracji.

Miarę uogólnioną $\lambda_m^{(23)}$ otrzymujemy wówczas, gdy $h_2 = 1$ i $h_3 < 1$. Jeśli natomiast $h_3 = 1$ i $h_2 > 1$, to efektem zastosowania wzoru (23) jest miara $\lambda_m^{(32)}$. Stosując ten wzór dokonujemy więc przeliczenia wad mało istotnych na istotne ($h_2 = 1$, $h_3 < 1$), albo wad istotnych na mało istotne ($h_2 > 1$, $h_3 = 1$). Relacje między współczynnikami wagowymi (h_2 , h_3) powinny być ustalane na podstawie analizy kosztów generowanych przez obydwie typy wad produktu. Jeśli relacje te nie mogą być poprawnie wyznaczone, to nie należy stosować funkcji integrujących postaci (23). W takiej sytuacji, analogicznie jak w przypadku wadliwości, najpełniejszą, ogólną charakterystyką jakości wykonania ze względu na cechy istotne i mało istotne jest wektor postaci

$$[\lambda_m^{(2)} \lambda_m^{(3)}] \quad (24)$$

Zauważmy, że wykorzystując funkcję (23) wektor ten można zredukować do punktu na dodatniej półosi liczb rzeczywistych, którego położenie wyznacza $\lambda_m^{(23)}$ albo $\lambda_m^{(32)}$. Operowanie tymi liczbami skrajnie upraszcza problem porównywania jakości wykonania różnych produktów tej samej klasy albo różnych partii tego samego produktu. Podkreślmy jednak raz jeszcze, że tego rodzaju syntetyczne miary jakości wykonania mają wartość merytoryczną tylko wówczas, gdy współczynniki wagowe (h_2 , h_3) we wzorze (23) zostaną wyznaczone na podstawie racjonalnych przesłanek, poddanych odpowiedniej weryfikacji metodologicznej. Tylko wówczas bowiem wartości $\lambda_m^{(23)}$ albo $\lambda_m^{(32)}$, generowane za pomocą wzoru (23) mogą być traktowane jako miary, w sensie nadawanym temu pojęciu w teorii pomiaru.

Statystyczne charakterystyki marketingowej jakości produktu

Marketingowa jakość produktu (wyrobu lub usługi) jest relacją (F) między jego profilem sensorycznym, a zbiorem potrzeb które ów produkt ma zaspokajać. Należy przy tym pamiętać, że każdy konsument definiuje swoją własną relację F, rozumianą jako stopień zaspokojenia jego potrzeb przez dany produkt oferowany na rynku. Marketingowa jakość produktu jest rozmytym obrazem jakości technicznej, a stopień owego rozmycia ma różnorodne uwarunkowania.⁴

Dla potrzeb zarządzania jakością indywidualne oceny jakości muszą być poddawane agregacji. W tym celu definiuje się zbiór wyróżnionych poziomów jakości. Może to być – na przykład – zbiór trójelementowy postaci

$$Q = \{ Q_1, Q_2, Q_3 \} \quad (25)$$

taki, że

$$Q_1 < Q_2 < Q_3 \quad (26)$$

gdzie Q_2 oznacza standardowy poziom jakości, natomiast Q_1 i Q_3 to – odpowiednio – niższy niż standardowy i wyższy niż standardowy poziom jakości produktu.

Przyporządkowując indywidualne oceny jakości produktu wyróżnionym poziomom jakości uzyskujemy rozkład rozpięty na zbiorze (25), charakteryzujący marketingową jakość produktu. Jeśli oceniany produkt oznaczymy symbolem A, to rozkład ten można zapisać następująco:

$$\Pr(Q(A) \sim Q_1) = p_1$$

⁴ Szersze wyjaśnienie tych problemów można znaleźć w książce: A. Iwasiewicz, Zarządzanie jakością (rozdział 1), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa – Kraków, 1999



$$\begin{aligned}\Pr(Q(A) \sim Q_2) &= p_2 \\ \Pr(Q(A) \sim Q_3) &= p_3\end{aligned}\quad (27)$$

przy czym

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Uzyskany w ten sposób rozkład ma oczywistą interpretację częstościową:

- ◆ $100p_1\%$ konsumentów w danym segmencie rynku jest zdania, że produkt A reprezentuje niższy niż standardowy poziom jakości,
- ◆ $100p_2\%$ konsumentów w danym segmencie rynku jest zdania, że produkt A reprezentuje standardowy poziom jakości,
- ◆ $100p_3\%$ konsumentów w danym segmencie rynku jest zdania, że produkt A reprezentuje wyższy niż standardowy poziom jakości.

Rozkłady tego typu można wykorzystać dla potrzeb analiz porównawczych. Załóżmy, że chcemy porównać jakość marketingową dwóch produktów A_1 i A_2 o następujących rozkładach preferencji

$$\begin{aligned}\Pr[Q(A_1) \sim Q_1] &= p_{11} & \Pr[Q(A_2) \sim Q_1] &= p_{21} \\ \Pr[Q(A_1) \sim Q_2] &= p_{12} & \Pr[Q(A_2) \sim Q_2] &= p_{22} \\ \Pr[Q(A_1) \sim Q_3] &= p_{13} & \Pr[Q(A_2) \sim Q_3] &= p_{23}\end{aligned}$$

Dokonajmy następującego odwzorowania wyróżnionych poziomów jakości (25) w zbiór liczb rzeczywistych:

$$L(Q_1) = -1, L(Q_2) = 0, L(Q_3) = 1 \quad (28)$$

Mając takie odwzorowanie można wyznaczyć przeciętne liczbowe oceny marketingowej jakości obu produktów:

$$\begin{aligned}E[L(A_1)] &= -1 \cdot p_{11} + 0 \cdot p_{12} + 1 \cdot p_{13} = p_{13} - p_{11} \\ E[L(A_2)] &= -1 \cdot p_{21} + 0 \cdot p_{22} + 1 \cdot p_{23} = p_{23} - p_{21}\end{aligned}$$

Ten produkt reprezentuje wyższy poziom jakości marketingowej w danym segmencie rynku, któremu odpowiada wyższa wartość $E[L(A)]$.

Przykład 2

Założmy, że w rezultacie badania opinii konsumentów należących do danego segmentu rynku, o produktach A_1 i A_2 uzyskano następujące rozkłady preferencji:

$$\begin{aligned}\Pr[Q(A_1) \sim Q_1] &= 0.2 & \Pr[Q(A_2) \sim Q_1] &= 0 \\ \Pr[Q(A_1) \sim Q_2] &= 0.3 & \Pr[Q(A_2) \sim Q_2] &= 0.4 \\ \Pr[Q(A_1) \sim Q_3] &= 0.5 & \Pr[Q(A_2) \sim Q_3] &= 0.6\end{aligned}$$

Mamy więc $E[L(A_1)] = p_{13} - p_{11} = 0.5 - 0.2 = 0.3$ i $E[L(A_2)] = p_{23} - p_{21} = 0.6 - 0 = 0.6$, a to oznacza, że produkt A_2 reprezentuje wyższy poziom jakości marketingowej, niż produkt A_1 . Sformułowany powyżej wniosek wymaga komentarza. Zauważmy przede wszystkim, że dotyczy on tylko aktualnego stanu „świadomości jakościowej” konsumentów należących do danego segmentu rynku, która znajduje swoje odbicie w rozkładach preferencji konsumenckich. Zmiana tych rozkładów może doprowadzić do zmiany sformułowanego wniosku. Zauważmy też, że nie można wyciągać



jakichkolwiek merytorycznych wniosków z wartości różnicy $E[L(A_2)] - E[L(A_1)]$. Odzworowanie (28) jest pomiarem na skali porządkowej. Ma to ten skutek, że merytoryczną interpretację ma jedynie znak różnicy $E[L(A_2)] - E[L(A_1)]$, a w konsekwencji nierówność $E[L(A_2)] > E[L(A_1)]$. Zwrot tej nierówności nie zmienia się, jeśli w odzworowaniu (28) liczby -1 , 0 i 1 zostaną zastąpione jakimkolwiek innym ciągiem liczb x_1 , x_2 i x_3 , takim że $x_1 < x_2 < x_3$ oraz $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$.

Statystyczna analiza wydolności procesu

Decyzja o podjęciu produkcji dowolnego wyrobu, albo o rozpoczęciu świadczenia dowolnej usługi, powinna być poprzedzona analizą wydolności procesu (ang. process capability analysis). W polskiej literaturze przedmiotu częściej używane jest określenie "zdolność procesu", a niektórzy autorzy zalecają używanie określenia "zdolność jakościowa". W rozważanym tu kontekście słowa "zdolność" i "wydolność" mogą być traktowane jako synonimy, przy czym "wydolność" nieco lepiej, jak się wydaje, oddaje istotę rzeczy. Istotą omawianej tu analizy jest bowiem badanie zgodności między:

- ♦ wymaganiami wynikającymi z projektu produktu, a
- ♦ możliwościami procesu technologicznego, w którym ten produkt (wyrób lub usługa) ma być wytwarzany.

Podstawą oceny owej zgodności jest oczekiwany poziom jakości wykonania. Jeśli można oczekiwać wysokiej jakości wykonania, a więc jeśli proces ma zdolność do odtwarzania projektu w praktycznie każdym akcie produkcji, albo praktycznie każdym akcie świadczenia usługi, to proces taki jest oceniany jako wydolny. I odwrotnie, proces jest oceniany jako niewydolny, jeśli przeprowadzona analiza nie pozwala oczekiwać wysokiej jakości wykonania produktu. Mówiąc ogólniej, proces jest wydolny jeśli jest w stanie sprostać postawionemu przed nim zadaniu, w sensie przyjętego kryterium zgodności. Jest on natomiast niewydolny, jeśli temu zadaniu nie może sprostać. Celem statystycznej analizy wydolności procesu jest zawsze rozstrzygnięcie, czy w konkretnym przypadku spełniona jest nierówność

$$Q(A;Z) \geq Q_0 \quad (29)$$

w której $Q(A;Z)$ oznacza poziom jakości wykonania, jakiego można oczekiwać realizując projekt produktu A w procesie technologicznym Z , natomiast Q_0 jest najniższym, możliwym do zaakceptowania poziomem jakości konkretnego produktu. Dodajmy, że poziom Q_0 powinien być określany przez służby marketingowe przedsiębiorstwa, na podstawie obserwowanych wymagań rynku, a także przyjętej polityki jakości i strategii marketingowej.

W cytowanej już normie terminologicznej PN-ISO 3534-2 poziom jakości Q_0 jest określany jako dopuszczalny poziom procesu (albo akceptowany poziom procesu) i jest on oznaczany symbolem APL (od ang. acceptable process level). Pojęcie to zdefiniowane jest następująco: "...poziom procesu stanowiący zewnętrzną granicę obszaru procesów akceptowanych."

Ogólna nierówność (29) nie wystarcza oczywiście do rozwiązywania praktycznych problemów w zakresie badania wydolności procesów. W takiej sytuacji należy posłużyć się odpowiednią miarą jakości wykonania, a mianowicie wadliwością, albo przeciętną liczbą wad w jednostce produktu. Jeśli zgodność między wymaganiami projektu i możliwościami procesu jest oceniana na podstawie oczekiwanej cząstkowej wadliwości strumienia produktu, to ogólną nierówność (29) zastępujemy warunkiem

$$p(X) \leq p_0(X) \quad (30)$$



gdzie $p_0(X)$ jest największą dopuszczalną wadliwością produktu generowanego przez badany proces, ze względu na zmienną diagnostyczną X . Należy ją interpretować jako APL.

Jeśli do pomiaru poziomu jakości wykonania wykorzystujemy przeciętną liczbę wad w jednostce produktu, to wówczas badaniu podlega nierówność

$$\lambda_m(X) \leq \lambda_{m,0}(X) \quad (31)$$

w której $\lambda_{m,0}(X)$ oznacza największą dopuszczalną przeciętną liczbę wad ze względu na zmienną X , w umownej agregatowej jednostce produktu składającej się z m jednostek rzeczywistych. Należy ją interpretować jako wartość APL.

Badanie wydolności procesu przy alternatywnej ocenie właściwości produktu

W rozważanym przypadku liczbowym obrazem badanej cechy, albo (część) agregatu cech, jest zero-jedynkowa zmienna losowa X , o realizacjach (x) generowanych według reguły (5). Miara poziomu jakości jest w takiej sytuacji wadliwość $p(X)$, interpretowana jako prawdopodobieństwo wygenerowania wadliwej jednostki produktu; zob. wzór (6). Zdefiniowana w ten sposób wadliwość jest parametrem rozkładu obserwowanej zmiennej diagnostycznej X . Im mniejsza jest wartość $p(X)$, tym rzadziej pojawiają się wartości $x = 1$ i tym lepiej świadczy to o wydolności badanego procesu. I odwrotnie, im większa jest wartość $p(X)$, tym mniejsza jest wydolność procesu, albowiem oznacza to częstsze pojawianie się jednostek produktu wykazujących brak zgodności z wymaganiami ($x = 1$). Zauważmy, że wartość wadliwości $p(X)$ zależy od tego, w jaki sposób zostanie określona reguła, według której rozstrzyga się, czy badana jednostka produktu spełnia wymagania jakościowe, czy też ich nie spełnia. Jeśli reguła ta zostanie określona bardzo liberalnie, to nawet bardzo lichego produktu można uznać za dobry. I odwrotnie, jeśli owa reguła zostanie określona bardzo rygorystycznie to nawet najlepszy produkt można zdyskwalifikować. Jedyną, jak się wydaje, metodą zapewnienia izomorfizmu między obiektowym systemem relacyjnym, a odpowiadającym mu liczbowym systemem relacyjnym, jest tu umowa między dostawcą (producentem) i odbiorcą (konsumentem). Umowa taka powinna dokładnie precyzować, posługując się ewentualnie odpowiednim wzorcem, jakie właściwości powinna posiadać poprawnie wykonana jednostka produktu, a także jakie odstępstwa są dopuszczalne. Przedstawione uwagi dotyczą elementarnego przypadku, gdy zero-jedynkowa zmienna losowa X , o realizacjach generowanych według wzoru (5), jest liczbowym obrazem pojedynczej cechy, ze względu na którą oceniana jest jednostka produktu. Jeśli mamy do czynienia z wielocechowym opisem stanu każdej badanej jednostki produktu, to pojawia się kolejny problem, a mianowicie odpowiednie zdefiniowanie relacji zgodności między wzorcowym i rzeczywistym stanem jednostki produktu.

Z przedstawionych rozważań wynika bezpośrednio, że w przypadku alternatywnej oceny właściwości produktu badanie wydolności procesu sprowadza się w istocie do weryfikacji hipotezy zerowej postaci

$$H_0 : p(X) \leq p_0(X) \quad (32)$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$H_1 : p(X) > p_0(X) \quad (33)$$

Jeśli próbka jest dostatecznie liczna, to do weryfikacji hipotezy (32) można wykorzystać test U .

Badanie wydolności procesu przy liczbowej ocenie właściwości produktu

Założmy obecnie, że liczbowym obrazem pojedynczej (użytkowej lub technicznej) cechy produktu, jest ciągła zmienna losowa X , którą potraktujemy jako zmienną diagnostyczną. Przypomnijmy, że w takiej sytuacji podzbiór wartości pożądanых X^+ przybiera postać przedziału liczbowego na osi



badanej zmiennej, nazywanego przedziałem tolerancji. Ustalmy uwagę na przypadku, gdy zmienna ta ma rozkład normalny. Fakt ten zapiszemy obecnie następująco:

$$X \sim N(\mathbf{M}; \sigma) \quad (34)$$

gdzie odchylenie standardowe σ jest miarą precyzji procesu, natomiast \mathbf{M} jest zbiorem możliwych do uzyskania wartości μ . Zakładamy więc - zgodnie z techniczną naturą rozważanego problemu - że precyzja procesu jest ustalona (zwłaszcza w krótkich przedziałach czasu), natomiast na poprawność procesu (mierzoną wartością różnicy $\mu - x_0$) można w pewnych granicach oddziaływać poprzez wybór odpowiednich parametrów procesu. W świetle przedstawionych powyżej zależności, między projektem i procesem technologicznym zachodzi zgodność, gdy prawdziwa jest hipoteza zerowa (32), a więc gdy

$$\Pr(x \notin \mathbf{X}^+) = p(X) \leq p_0(X) \quad (35)$$

albo

$$\Pr(x \in \mathbf{X}^+) = 1 - p(X) \geq 1 - p_0(X) \quad (36)$$

Przykład 3

Założmy, że wymagania techniczno-marketingowego projektu produktu są następujące:

$$\mathbf{X}^+ = [10;20], x_0 = 15, p_0(X) = 0.03 \text{ (3\%)}$$

Produkt ma być wytwarzany w procesie technologicznym o następujących możliwościach:

$$\mu \in \mathbf{M} = [12;16], \sigma = 2$$

Czy proces ten jest wystarczająco wydolny? Należy przede wszystkim sprawdzić czy $x_0 \in \mathbf{M}$? Ponieważ w rozważanym przypadku warunek ten jest spełniony, albowiem $15 \in [12;16]$, przeto parametry procesu należy ustalić na takim poziomie, by $x_0 = \mu = 15$. Zapewnia to uzyskanie najmniejszej możliwej w danych warunkach wadliwości produktu. Nie wiadomo jednak czy owa najmniejsza wadliwość będzie dostatecznie mała, a mianowicie czy spełni nierówność $p(X) \leq 0.03$. Wykorzystując elementarne własności rozkładu normalnego, mamy:

$$\begin{aligned} p(X) &= P(X < 10) + P(X > 20) = \Phi [(10-15)/2] + 1 - \Phi [(20-15)/2] = \\ &= \Phi (-2.5) + 1 - \Phi (2.5) = 0.00621 + 1 - 0.99379 = \\ &= 2 \cdot 0.00621 = 0.01242 \text{ (1.2\%)} \end{aligned}$$

Ponieważ $p(X) = 1.2\% < p_0(X) = 3\%$, przeto zachodzi zgodność między wymaganiami projektu i możliwościami procesu technologicznego. Uregulowany proces technologiczny będzie generował strumień produktu o wadliwości 1.2%, podczas gdy największa dopuszczalna wadliwość wynosi 3%.

Opisana metoda postępowania pozwala oceniać wydolność procesu, niezależnie od tego jaki jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej charakteryzującej badany proces. Jeśli dostępny jest wystarczająco obszerny materiał empiryczny, to badanie wydolności procesu można prowadzić bez odwoływania się do postaci analitycznej dystrybuanty. W takiej sytuacji wystarcza znajomość empirycznego rozkładu obserwowanej charakterystyki procesu, przedstawionego w postaci histogramu. Ceną płaconą za niezajomość rozkładu obserwowanej zmiennej losowej X jest wówczas liczność próbki jaką trzeba poddać badaniu podczas empirycznej weryfikacji sformułowanej oceny wydolności procesu. Należy wówczas odwołać się do pojęć pierwotnych, takich jak zbiór wartości pożądanых \mathbf{X}^+ i zbiór wartości niepożądanych \mathbf{X}^- , a następnie zdefiniować



odpowiednią zero-jedynkową zmienną losową o realizacjach generowanych według reguły (5). Mając bardzo liczny zbiór realizacji tej zmiennej losowej można dokonać bezpośredniej weryfikacji hipotezy zerowej (32), wobec hipotezy alternatywnej (33).

Znormalizowane wskaźniki wydolności procesu

W systemie norm ISO nie ma normy standaryzującej procedurę badania wydolności procesu. Jedyne cytowana już wielokrotnie norma terminologiczna PN-ISO 3542-2, a także norma PN-ISO 8258 „Karty kontrolne Shewharta”, zawiera pewne ustalenia dotyczące omawianego problemu. Norma PN-ISO 3534-2 zaleca stosowanie następujących wskaźników:

$$PCI_{6\sigma} = (x_g - x_d)/6\sigma \quad (37)$$

$$PCI_{\sigma} = (x_g - x_d)/\sigma \quad (38)$$

Charakterystyki te określane są jako "wskaźniki zdolności procesu" (ang. process capability index; PCI) a przytoczone wzory opatrzone są następującymi wskazówkami interpretacyjnymi:

- ♦ Niska względna zdolność procesu: $PCI_{\sigma} < 6$ lub $PCI_{6\sigma} < 1$,
- ♦ Średnia względna zdolność: $6 < PCI_{\sigma} < 8$, lub $1 < PCI_{6\sigma} < 1.33$,
- ♦ Wysoka względna zdolność: $PCI_{\sigma} > 8$, lub $PCI_{6\sigma} > 1.33$.

Między charakterystykami (37) i (38) zachodzi bardzo oczywisty związek funkcyjny:

$$PCI_{6\sigma} = PCI_{\sigma} / 6 \quad (39)$$

Tak więc, w istocie mamy do czynienia z dwiema postaciami tej samej charakterystyki wydolności procesu. Ustalmy uwagę na $PCI_{6\sigma}$. Ta postać omawianej charakterystyki ma prostszą, intuicyjną interpretację statystyczną i jest często przywoływana w literaturze przedmiotu. Konstrukcja wzoru (37) oparta jest na bardzo nieskomplikowanym rozumowaniu. Licznik wzoru reprezentuje wymagania projektu, natomiast mianownik opisuje możliwości procesu technologicznego. Owe możliwości są tu opisywane za pomocą przedziału naturalnej zmienności procesu (ang. natural process interval), opartego na właściwościach rozkładu normalnego. Długość tego przedziału wynika z różnicy:

$$UNL - LNL = (\mu + 3\sigma) - (\mu - 3\sigma) = 6\sigma \quad (40)$$

w której $LNL = \mu - 3\sigma$ (ang. lower natural limit) oznacza dolną naturalną granicę procesu, natomiast $UNL = \mu + 3\sigma$ (ang. upper natural limit) jest granicą górną.

Tak więc, wartość $PCI_{6\sigma}$ odpowiada na pytanie, ile razy przedział tolerancji jest dłuższy od przedziału naturalnej zmienności procesu, albo jaką część zakresu naturalnej zmienności procesu stanowi przedział tolerancji. Należy pamiętać, że oceniając wydolność procesu za pomocą wskaźnika $PCI_{6\sigma}$ ustalamy *implicit*e największą dopuszczalną wadliwość strumienia na poziomie $p_0(X) = 0.0027$ (0.27%). Z właściwości rozkładu normalnego wynika, bowiem że

$$P(x \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) = 0.9973$$

i w konsekwencji

$$P(x \notin [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) = 0.0027$$

W większości sytuacji występujących w praktyce przemysłowej są to wymagania wygórowane. Wadliwości poprodukcyjne rzędu 1%, a tym bardziej 0.5%, uważa się powszechnie za bardzo niskie. Przy obecnym poziomie technologii uzyskiwanie wadliwości niższych jest oczywiście możliwe, ale wiąże się z bardzo szybkim przyrostem kosztów wytwarzania, co stawia pod znakiem



zapytania opłacalność działań mających na celu zmniejszenie wadliwości. Innym, i - jak się wydaje - poważniejszym defektem omawianej tu procedury oceny wydolności procesu jest fakt, że oczekiwana wadliwość strumienia produktu nie jest tu zmienną decyzyjną. Ma to ten skutek, że w taki sam sposób formułowane są wymagania w przypadku produkcji gwoździ, mikroprocesorów, spinaczy biurowych i dysz wtryskowych do silników wysokoprężnych. Niezależnie od tego, zakres stosowania omawianych miar wydolności procesu jest bardzo ograniczony ze względów formalnych. Nietrudno wszak zauważyć, że miary te można stosować tylko wówczas, gdy:

- ◆ zmienna losowa X , charakteryzująca możliwości procesu technologicznego, ma rozkład zbliżony do normalnego
- ◆ przedział tolerancji, charakteryzujący wymagania projektu, jest ograniczony obustronnie,
- ◆ wartość nominalna (docelowa, najbardziej pożądana) ulokowana jest centralnie w przedziale tolerancji, albo w ogóle nie jest definiowana.

Norma PN-ISO 3534-2 nie zawiera wskazówek jak oceniać wydolność procesu, albo urządzenia produkcyjnego, gdy przedział tolerancji obserwowanej zmiennej diagnostycznej X jest ograniczony tylko jednostronnie. Pozostając na gruncie standardowych wskaźników wydolności można do tego celu wykorzystać dwie charakterystyki, a mianowicie:

$$CPU = (x_g - \mu)/3\sigma \quad (41)$$

$$CPL = (\mu - x_d)/3\sigma \quad (42)$$

Nietrudno zauważyć, że ogólna zasada oceny wydolności jest tu taka sama jak w przypadku wzorów (37) i (38). Charakterystykę (41) stosuje się wówczas, gdy obserwowana zmienna X jest destymulantą jakości i gdy w konsekwencji przedział tolerancji ograniczony jest tylko od góry. Wzór (42) znajduje natomiast zastosowanie wówczas, gdy przedział tolerancji ograniczony jest tylko od dołu, a więc gdy zmienna X jest stymulantą jakości.

Wzory (37) i (38), mogą być wykorzystane do oceny wydolności procesu tylko wówczas, gdy można przyjąć, że spełniony jest warunek

$$\mu = x_0 = m_0 \quad (43)$$

gdzie m_0 jest środkiem przedziału tolerancji o wartości wynikającej ze wzoru

$$m_0 = (x_d + x_g)/2 \quad (44)$$

Jeśli warunek (43) nie jest spełniony, to oceny wydolności uzyskiwane za pomocą wzorów (37) i (38) są obciążone błędami systematycznymi. W takiej sytuacji norma PN-ISO 3534-2 zaleca postępowanie dwuetapowe. W pierwszym etapie należy wyznaczyć współczynnik korekcyjny (k) według wzoru:

$$k = \frac{|x_0 - \mu|}{\min\{(x_g - x_0), (x_0 - x_d)\}} \quad (45)$$

przy czym w praktyce wartość μ nie jest zwykle znana i zastępowana jest średnią arytmetyczną (\bar{x}) uzyskaną w rezultacie wstępnego badania procesu.

Wzór (45) nie jest precyzyjnie sformułowany i dlatego wymaga on komentarza. Zauważmy przede wszystkim, że niespełnienie warunku (43) może przybrać trzy formy:

$$\mu \neq x_0 = m_0. \quad (46)$$

$$\mu = x_0 \neq m_0. \quad (47)$$



$$\mu \neq x_0 \neq m_0 \quad (48)$$

Jeśli w konkretnej sytuacji zachodzi przypadek (46), to podstawianie wartości do wzoru (45) nie następuje trudności. Jeśli natomiast mamy do czynienia z przypadkiem (47), to we wzorze (45) w miejsce x_0 należy podstawić m_0 . W sytuacji gdy zachodzi (48) wzór (45) nie może być stosowany. Obliczoną wartość k należy podstawić do wzoru

$$C_{pk} = C_p (1 - k) \quad (49)$$

w którym C_p oznacza wartość wskaźnika wydolności obliczoną według wzoru (37) i (38).

Wyznaczony w ten sposób skorygowany wskaźnik wydolności procesu, albo urządzenia produkcyjnego, nazywany jest w normie PN-ISO 3542-2 wskaźnikiem wydajności procesu.

Wartość C_{pk} można też obliczyć według następującego wzoru

$$C_{pk} = C_p - \frac{|m_0 - \mu|}{3\sigma} = \frac{x_g - x_d}{6\sigma} - \frac{|m_0 - \mu|}{3\sigma} \quad (50)$$

We wzorze tym zakłada się *implicite*, że niespełnienie warunku (43) przybiera postać (47). Oznacza to, że przeciętny poziom procesu pokrywa się z wartością docelową (nominalną, najbardziej pożądaną), ale ta wartość nie jest położona centralnie w przedziale tolerancji $[x_d ; x_g]$.

Karty kontrolne Shewharta z możliwością akceptacji procesu

Konstrukcja i funkcjonowanie kart kontrolnych Shewharta jest szczegółowo opisane w każdym podręczniku statystycznych metod sterowania jakością. Dlatego też, poniżej przedstawimy nie ogólne zasady posługiwania się tymi kartami, lecz pewien specjalny i jednocześnie bardzo ważny problem. Zauważmy przede wszystkim, że standardowe karty kontrolne Shewharta nie dają możliwości akceptacji procesu. Wynika to z samej istoty tych kart, które są przecież odpowiednio zorganizowanymi sekwencjami klasycznych testów istotności, a testy te nie służą do przyjmowania weryfikowanych hipotez zerowych. Za pomocą standardowego testu istotności można albo odrzucić hipotezę zerową, albo orzec, że nie ma podstaw do jej odrzucenia. Nie zmienia to jednak faktu, że większość standardowych kart kontrolnych Shewharta można zmodyfikować w taki sposób, by za ich pomocą można było akceptować monitorowany proces. Modyfikacja ta polega na dokonaniu takich zmian w konstrukcji i funkcjonowaniu karty, aby było możliwe określenie *explicite* prawdopodobieństwa nie podjęcia koniecznej regulacji procesu (β).

W celu wyjaśnienia tych problemów odwołajmy się do karty \bar{x} , funkcjonującej w dwustronnym schemacie kontrolnym. Postępowanie należy rozpocząć od modyfikacji zespołu hipotez statystycznych branych pod uwagę w każdym kroku postępowania kontrolnego. Bez zmiany pozostaje hipoteza zerowa

$$H_0: \mu_t = x_0 \quad (51)$$

W klasycznych rozwiązaniach hipotezę tę weryfikuje się w kolejnych punktach $t = 1, 2, \dots$ wobec hipotezy alternatywnej głoszącej, że $\mu_t \neq x_0$. Obecnie sformułujemy dwie hipotezy alternatywne, a mianowicie lewostronną i prawostronną. Hipoteza lewostronna ma postać

$$H_{-1} : \mu_t = x_0 - \Delta\mu = \mu_{-1} \quad (52)$$

Prawostronna hipoteza alternatywna przedstawia się natomiast następująco:



$$H_1 : \mu_t = x_0 + \Delta\mu = \mu_1 \quad (53)$$

Mając wartości μ_{-1} i μ_1 należy ustalić położenie granic regulacji (\bar{x}_d i \bar{x}_g) na takim poziomie, aby

$$\Pr(\bar{x}_t < \bar{x}_d \mid \mu = x_0) = \alpha/2 \quad (54)$$

i jednocześnie

$$\Pr(\bar{x}_t > \bar{x}_d \mid \mu = \mu_{-1}) = \beta/2 \quad (55)$$

oraz by

$$\Pr(\bar{x}_t > \bar{x}_g \mid \mu = x_0) = \alpha/2 \quad (56)$$

i jednocześnie

$$\Pr(\bar{x}_t < \bar{x}_g \mid \mu = \mu_1) = \beta/2 \quad (57)$$

Kolejnym krokiem w omawianym postępowaniu powinno być wyznaczenie liczności próbki (n^*) zapewniającej spełnienie powyższych warunków. Ustalmy uwagę na zależnościach (52) i (53). Zauważmy, że równanie górnej granicy regulacji można zapisać dwojako:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_g &= x_0 + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \bar{x}_g &= \mu_1 - u_{\beta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Rozwiązując ten układ równań ze względu na n uzyskamy poszukiwaną licznosc próbki n^* . Mamy mianowicie:

$$x_0 + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu_1 - u_{\beta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Pamiętajac o tym, że

$$\mu_1 = x_0 + \Delta\mu$$

możemy napisać

$$x_0 + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = x_0 + \Delta\mu - u_{\beta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

W konsekwencji:

$$n^* = \left(\frac{\sigma(u_{\alpha/2} + u_{\beta/2})}{\Delta\mu} \right)^2 \quad (59)$$

Mając tę wartość możemy wyznaczyć położenie granic regulacji według powszechnie stosowanych równań

$$\bar{x}_g = x_0 + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x}_d = x_0 - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

podstawiając $n = n^*$.

Wnioskowanie o stanie procesu przebiega według następującego schematu:

- ◆ Jeśli spełniona jest nierówność

$$\bar{x}_d \leq \bar{x}_t \leq \bar{x}_g \quad (60)$$

to akceptujemy przebieg procesu, a prawdopodobieństwo zdarzenia losowego polegającego na tym, rozregulowanie procesu osiąga lub przekracza wartość $\Delta\mu$, nie jest większe niż β .

- ◆ Jeśli natomiast

$$\bar{x}_t < \bar{x}_d \text{ albo } \bar{x}_t > \bar{x}_g \quad (61)$$

to przyjmujemy, że rozregulowanie monitorowanego procesu osiągnęło wartość $\Delta\mu$, a prawdopodobieństwo zdarzenia losowego polegającego na tym, że w rzeczywistości proces jest uregulowany ($\mu = \mu_0$), nie przekracza α .

Przykład 4

Założmy, że: $x_0 = 100$, $\sigma = 2$, $\mu_{-1} = 98$, $\mu_1 = 102$, $\alpha = \beta = 0.10$. Mamy więc:

$$H_0 : \mu_t = 100 \quad (i)$$

$$H_{-1} : \mu_t = 98 \quad (ii)$$

$$H_1 : \mu_t = 102 \quad (iii)$$

Na jakim poziomie należy ustalić granice regulacji, aby z prawdopodobieństwem pomyłki nie przekraczającym 0.10 można było przyjąć hipotezę (i), jeśli uzyskana empirycznie średnia arytmetyczna z próbki \bar{x}_t spełni nierówność (60)?

W tablicach statystycznych, albo za pomocą kalkulatora prawdopodobieństwa w który wyposażony jest pakiet *STATISTICA* znajdujemy kwantyle $u_{\alpha/2} = u_{\beta/2} = u_{0,05} = 1.645$, a następnie po podstawieniu wartości do wzoru (59) uzyskujemy $n^* = 10.82$. Przyjmujemy więc $n^* = 11$ i wyznaczamy położenie granic regulacji:

$$\bar{x}_d = 100 - 1.645 \frac{2}{\sqrt{11}} = 99.01 \quad (iv)$$

$$\bar{x}_g = 100 + 1.645 \frac{2}{\sqrt{11}} = 100.99 \quad (v)$$

Tak więc, jeśli średnia arytmetyczna \bar{x}_t obliczona na podstawie wyników badania jedenastu losowo pobranych jednostek produktu spełni nierówność (60), to przyjmujemy hipotezę (i), a prawdopodobieństwo tego, że w rzeczywistości prawdziwa jest hipoteza (ii) lub hipoteza (iii), nie przekracza $\beta = 0.10$. Jeśli natomiast obliczona średnia arytmetyczna \bar{x}_t leży poza obszarem



ograniczonym przez linie kontrolne $\bar{x}_d = 99.01$ i $\bar{x}_g = 100.99$, to podejmujemy regulację procesu, a prawdopodobieństwo tego, że okaże się ona zbędna, nie przekracza $\alpha = 0.10$.

Opisane postępowanie nie jest jedyną metodą zapewniania karcie kontrolnej \bar{x} możliwości akceptacji monitorowanego procesu. Jest to metoda najprostsza, a jednocześnie najlepiej - jak się wydaje - ilustrująca istotę problemu. Słabą stroną opisanego postępowania jest brak głębszego uzasadnienia dla przyjmowanych wartości μ_{-1} i μ_1 . Wartości te można powiązać z największą dopuszczalną i najmniejszą dyskwalifikującą wadliwością (p_0 , p_1) strumienia produktu generowanego przez monitorowany proces. Opis takiego postępowania podany jest w normie ISO 7966 „Acceptance control charts” (1993).

Literatura:

1. J. Cyran, J. Steczkowski, K. Zając; Statystyczne metody kontroli jakości produktów, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1973.
2. O. Hryniewicz; Nowoczesne metody statystycznego sterowania jakością, Instytut Badań Systemowych PAN, Omnitech Press, Warszawa 1996.
3. A. Iwasiewicz; Statystyczna kontrola jakości w toku produkcji – Systemy i procedury, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1985.
4. J. Obalski; Statystyczna kontrola jakości podczas produkcji, Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1955.
5. J. Oderfeld; Zarys statystycznej kontroli jakości, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1954.
6. J. R. Thompson, J. Koronacki; Statystyczne sterowanie procesem – Metoda Deminga etapowej optymalizacji jakości, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1994.
7. L. Wasilewski; Metody kontroli jakości w przedsiębiorstwach przemysłowych, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1974.